Introduktion til differentialligninger

En differentialligning er en ligning hvor en funktion samt en eller flere af dens afledede funktioner optræder i samme ligning. Differentialligningens *orden* er den højeste afledede orden i ligningen. F.eks. givet følgende differentialligning:

$$f'(x) = 2 \cdot f(x)$$

Her optræder funktionen f samt dens første ordens afledede funktion f' hvorved at differentialligningen er af første orden.

Som bekendt kan afledte funktioner skrives med flere forskellige notationer bl.a. med brug af differentialkvotienten. Den ovenstående ligning kan f.eks. også skrives ved brug af notationen for differentialkvotienten således:

$$\frac{df}{dx}(x) = 2 \cdot f(x)$$

Ydermere er det ofte anvendt at man erstatter funktionsudtrykket med en hjælpevariabel f.eks. $y = f(x),\ y' = f'(x)$, osv. som ligeledes anvendes til at analysere differentialligningen grafisk. Herved kan førnævnte differentialligning skrives som:

$$y' = 2 \cdot y \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cdot y$$

For at løse en differentialligning gælder det om at finde den funktionsforskrift for f som løser ligningen. Med andre ord er løsningen en funktion og altså ikke bare et tal som var tilfældet for algebraiske ligninger.

Eftervisning af en givet løsning

At løsningen er en funktion kan ses ved at indsætte funktionsforskriften for løsningen i selve ligningen. F.eks. givet differentialligningen:

$$f(x) = x \cdot f'(x)$$

kan det vises at funktionen med forskriften $f(x) = x$ er en løsning til differentialligningen.

Dette kan gøres ved først at bestemme forskriften for alle de afledede funktionsværdier, der indgår i differentialligningen. I den ovenstående differentialligning indgår den afledede funktionsværdi $f'(x)$ så denne beregnes ved at differentiere den antagede løsning $f(x) = x$:

$$f'(x) = \big(f(x)\big)' = \big(x\big)' = 1$$

Herefter indsættes forskrifterne for f samt f' i differentialligningen for at undersøge om dette resulterer i et udsagn der er opfyldt for alle værdier af x:

$$f(x) = x \cdot f'(x) \quad \Rightarrow \quad x = x \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$$

Det ses netop, at indsættelse af af forskrifterne i differentialligningen resulterer i udsagnet $1 = 1$ hvilket er sandt for alle værdier af x. Det kan altså her konkluderes at $f(x) = x$ er en løsning til differentialligningen.