Hældningsfelt

En af de grafiske analyser, der kan foretages for 1. ordens differentialligninger, er at plotte et såkaldt *hældningsfelt*. Et hældningsfelt anvender at såfremt en 1. ordens differentialligning omskrives ved at indføre en hjælpevariabel vil denne nye ligning netop angive differentialkvotienten til den specifikke løsningskurve der går gennem et givent punkt. Hermed kan differentialkvotienten nemt plottes som små linjestykker i et koordinatsystem.

Betragtes f.eks. differentialligningen:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$$

Denne differentialligning kan omskrives ved brug af hjælpevariablerne $y = f(x)$ samt $y' = f'(x)$ til:

$$y' = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Denne ligning angiver altså differentialkvotienten dvs. hældningen på den linje, der tangerer løsningskurven i et tilfældigt punkt (x, y).

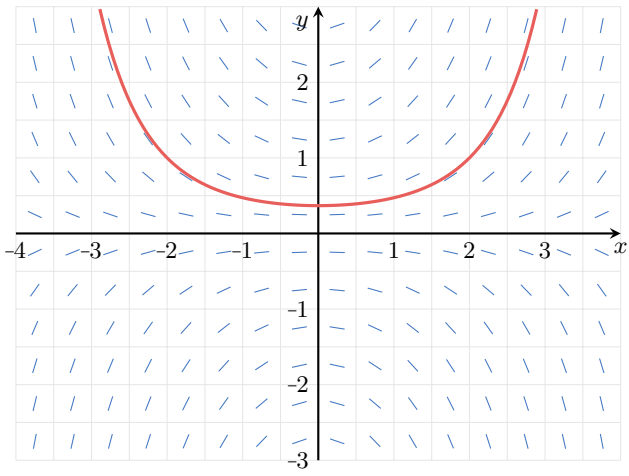
For eksempel kan ligningen til tangenten til løsningskurven i punktet $(x_0, y_0) = (2, 1)$ beregnes ved formlen $y = y_0' \cdot (x - x_0) + y_0$. Her anvendes differentialligningen til at beregne hældingen y_0':

$$y_0' = \tfrac{1}{2} \cdot x_0 \cdot y_0 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

Med hældningen $y_0' = 1$ samt punktets koordinater $x_0 = 2$ og $y_0 = 1$ bestemmes ligningen for tangenten til løsningskurven:

$$y = 1 \cdot (x - 2) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 1$$

Ved at bruge denne metode for et felt af punkter i koordinatsystemet kan differentialligningen undersøges grafisk ved at plotte hver tangentligning som små linjestykker i hvert punkt. Denne måde at grafisk repræsentere en differentialligning kaldes et *hældningsfelt* og ses nedenfor for ovenstående eksempel:



Hældningsfeltet er plottet med de små blå linjestykker (også kaldet *linjeelementer*), hvor løsningskurven til den specifikke løsning, der indeholder punktet $(2, 1)$ er plottet med den røde kurve. Det ses at linjeelementerne netop angiver løsningskurvens differentialkvotient dvs. hældning. På denne måde opnås en grafisk metode hvorpå man kan analysere sig frem til hvordan en differentialligning opfører sig såfremt man har opgivet et punkt for en specifik løsning. Et linjeelement til et givet punkt (x_0, y_0) kan opskrives ved:

$$(x_0, y_0, y_0')$$

For ovenstående eksempel hvor tangenten til løsningskurven i punktet $(x_0, y_0) = (2, 1)$ blev bestemt med hældningen $y_0' = 1$ kan linjeelementet altså angives ved:

$$(x_0, y_0, y_0') = (2, 1, 1)$$