Ligevægtspunkter

Undersøges hele løsningsrummet for differentialligninger kan man for nogle differentialligninger finde såkaldte *ligevægtspunkter* (også kaldet *fikspunkter*) hvor løsningen til differentialligningen $f(x)$ bliver konstant ift. dens afhængige variabel x.

Typisk opstår dette når en 1. ordens differentialligning har en form hvor den uafhængige variabel x ikke indgår eksplicit i ligningen og at den afledte funktion derfor udelukkende er en funktion af funktionen selv. I sådanne tilfælde kan det således være muligt at bestemme en værdi af $f(x)$ hvor den afledte funktionsværdi er lig nul: $f'(x) = 0$ og funktionen således forbliver konstant ift. x.

Betragtes f.eks. differentialligningen:

$$f'(x) = f(x) \cdot \big(4 - f(x)\big)$$

Her ses at den afledte funktion f' udelukkende er en funktion af funktionen f. Først omskrives differentialligningen ved brug af hjælpevariablerne $y = f(x)$ samt $y' = f'(x)$ til:

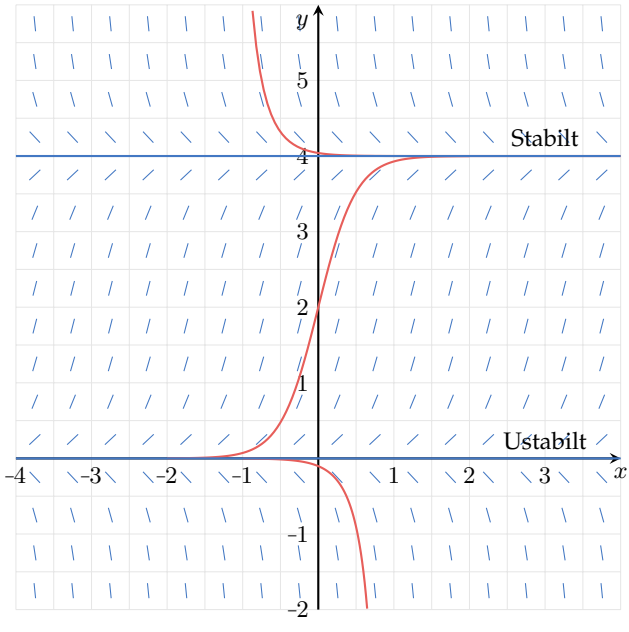
$$y' = y \cdot \big(4 - y\big)$$

Ligevægtspunkter er således de værdier af y hvor y' er lig nul. Altså sættes $y' = 0$ i ligningen som herefter løses for y ved brug af nulreglen:

$$0 = y \cdot \big(4 - y\big) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y = 4$$

Heraf ses at værdierne $y = 0$ samt $y = 4$ er ligevægtspunkter.

Betragtes det tilsvarende hældningsfelt kan ligevægtspunkterne indtegnes som linjer i hældningsfeltet som ses nedenfor. Her bemærkes at linjerne for ligevægtspunkterne opdeler hældningsfeltet i regioner hvor løsninger ikke kan bevæge sig på tværs af linjerne. I figuren er vist tre forskellige løsninger som hver er begrænset til en bestemt opdeling af løsningsrummet.



Betragter man figuren lidt nærmere kan man se, at der er en fundamental forskel på de to ligevægtspunkter. For ligevægtspunktet ved $y = 4$ kan man se at hældningsfeltet drejer ind mod linjen for ligevægtspunktet hvilket ligeledes gør, at løsningskurverne tilnærmer sig ligevægtspunktet. Denne type af ligevægtspunkter kaldes et *stabilt* ligevægtspunkt.

Ligevægtspunktet ved $y = 0$ er en anden type af ligevægtspunkt. Her ses det, at hældningsfeltet drejer væk fra linjen for ligevægtspunktet hvilket også gør, at løsningskurverne fraviger sig fra ligevægtspunktet. Denne type af ligevægtspunkter kaldes et *ustabilt* ligevægtspunkt.