Eksponentiel vækst

For nogle af de simple differentialligninger kan løsningen findes direkte ud fra de afledede funktion der er direkte udledt ved at betragte differentialkvotienten. For eksempel kan følgende implikation udledes direkte ved at betragte regnereglen for differentiering af en eksponentiel funktion:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$$

Det ses her at forskriften for både f og f' er ens hvilket betyder at funktionen er en løsning til differentialligningen:

$$f'(x) = f(x)$$

Der findes dog også andre løsninger til denne differentialligning hvilket ses ved at gange en tilfældig konstant på eksponentialfunktionen:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left(k \cdot \mathrm{e}^x\right)' = k \cdot \left(\mathrm{e}^x\right)' = k \cdot \mathrm{e}^x$$

Igen forekommer at $f'(x) = f(x)$ og dvs. at $f(x) = k \cdot \mathrm{e}^x$ repræsenterer således den generelle løsning på denne differentialligning.

Differentialligningen for eksponentiel vækst kan generaliseres en smule mere ved at introducere en konstant a i potensen hvorved forskriften for funktionen $f(x)$ samt dens afledte funktion $f'(x)$ er bestemt ved:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left(k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}\right)' = k \cdot \left(\mathrm{e}^{a \cdot x}\right)' = a \cdot k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}$$

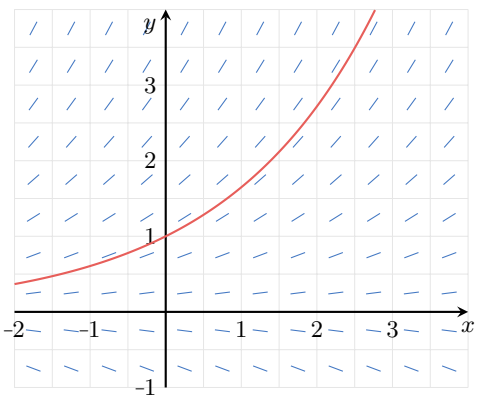
Igen ses det, at selve funktionsforskriften indgår i forskriften for den afledte funktion hvorved den tilsvarende differentialligning er:

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

Altså, hvis man ved at relationen mellem en funktion og dens afledede funktion er $f'(x) = a \cdot f(x)$ så ved man ligeledes at funktionen der løser differentialligningen må være på den generelle form $f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}$.

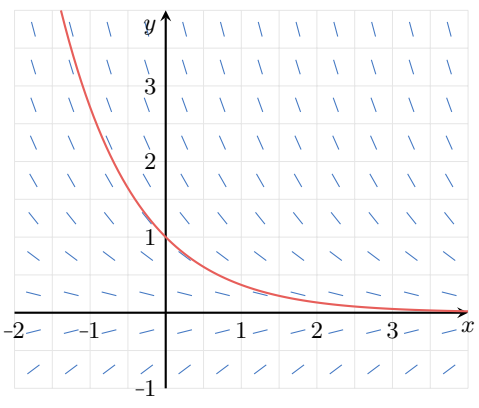
Differentialligninger på formen: $f'(x) = a \cdot f(x)$ kaldes også for *proportionale* differentialligninger idet der er en proportionalitet mellem den afledte funktionsværdi $f'(x)$ og selve funktionsværdien $f(x)$.

I figuren nedenfor er differentialligningens hældningsfelt vist for tilfældet hvor a-koefficienten er positiv $a > 0$ sammen med den specifikke løsningskurve, der svarer til $k = 1$.



Af figuren kan det aflæses at hældningsfeltet har et ligevægtspunkt ved $y = 0$ og da $a > 0$ er der tale om et ustabilt ligevægtspunkt hvor løsningskurverne går væk fra ligevægtspunktet. Ydermere ses at k udgør skæringsværdien for løsningskurven 2.aksen hvilket vil sige at denne udgør en startbetingelse for den specifikke løsning idet $f(0) = k$.

I figuren nedenfor er differentialligningens hældningsfelt samt en løsningskurve plottet i tilfældet hvor a koefficienten er negativ $a < 0$. Her kan det ses at hældningsfeltet stadig har et ligevægtspunkt ved $y = 0$ men da $a < 0$ er der tale om et stabilt ligevægtspunkt hvor løsningskurverne går imod ligevægtspunktet.



Den eksponentielle differentialligning også kaldet den proportionale differentialligning kan nu opsummeres i følgende sætning.

Differentialligning for eksponentiel vækst

Differentialligningen der beskriver eksponentiel vækst har den generelle form:

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

Den generelle/fuldstændige løsning til differentialligningen er:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}$$

Talværdien af k angiver skæringsværdien på 2.aksen og er således også en begyndelsesbetingelse idet $f(0) = k$.
Differentialligningen har ligevægtspunkt i $y = 0$ og fortegnet for koefficienten a bestemmer om ligepunktet er ustabilt ($a > 0$) eller stabilt ($a < 0$) hvilket vil sige om løsningskurven er voksende eller aftagende.