Forskudt eksponentiel vækst

Differentialligningen for *forskudt* eksponentiel vækst er en generalisering af differentialligningen for eksponentiel vækst hvor der introduceres endnu en koefficient til differentialligningen. Den nye konstant gør, at ligevægtspunktet for differentialligningen flyttes til en vilkårlig y-værdi.

Indledningsvis tilføjes konstanten c til løsningsfunktionen for eksponentiel vækst:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} + c$$

Herfra udregnes den afledede funktion:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(f(x)\big)' \\ &= \big(k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} + c\big)' \\ &= k \cdot \big(\mathrm{e}^{a \cdot x}\big)' + \big(c\big)' \\ &= k \cdot a \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} \end{aligned}$$

I udtrykket for den afledede funktion ses det, at udtrykket $k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}$ optræder, hvilket kan erstattes af udtrykket $f(x) - c$ idet:

$$f(x) - c = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}$$

Der opnås herved en differentialligning på formen:

$$f'(x) = a \cdot \big(f(x) - c\big) = a \cdot f(x) - a \cdot c$$

For at få et pænere udtryk på højresiden, der samtidig udgør en lineær sammenhæng mellem $f(x)$ og $f'(x)$, introduceres konstanten $b = -a \cdot c$ hvorved følgende generelle form opnås:

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Den generelle løsning til denne differentialligning er givet ved:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} - \frac{b}{a}$$

Her er anvendt at $c = -\frac{b}{a}$. Differentialligninger på formen: $f'(x) = a \cdot f(x) + b$ kaldes også for *lineære* differentialligninger idet der er en lineær sammenhæng mellem den afledte funktionsværdi $f'(x)$ og selve funktionsværdien $f(x)$.

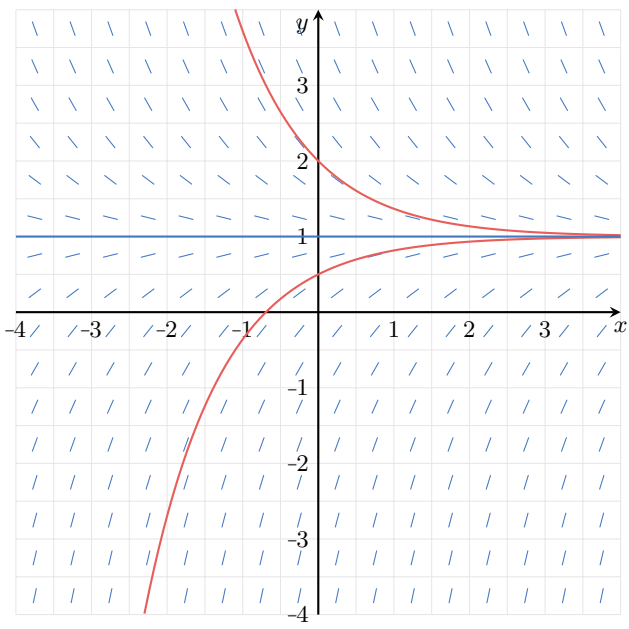
Ud fra differentialligningens generelle form kan der ligeledes bestemmes differentialligningens ligevægtspunkter. Først omskrives ligningen ved brug af hjælpevariablerne $y = f(x)$ samt $y' = f'(x)$ til:

$$y' = a \cdot y + b$$

Hernæst sættes $y' = 0$ og ligningen løses for y:

$$0 = a \cdot y + b \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}$$

Differentialligningen har altså ligevægtspunkt ved $y = -\frac{b}{a}$ hvilket også ses på hældningsfeltet nedenfor. Der er i figuren ligeledes plottet to forskellige specifikke løsninger, der befinder sig på hver sin side af ligevægtspunktet som i dette tilfælde er et stabilt ligevægtspunkt.



Den forskudte eksponentielle differentialligning også kaldet den lineære differentialligning kan nu opsummeres i følgende sætning.

Differentialligning for forskudt eksponentiel vækst

Differentialligningen, der beskriver forskudt eksponentiel vækst, har en af følgende generelle former:

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$
$$f'(x) = a \cdot \big(f(x) - c\big) \quad \text{hvor} \quad b = -a \cdot c$$

Den generelle/fuldstændige løsning til differentialligningen er:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x} - \frac{b}{a}$$

Talværdien af k er betydende for skæringsværdien på 2.aksen idet $f(0) = k - \frac{b}{a}$.
Differentialligningen har ligevægtspunkt i $y = -\frac{b}{a}$ og fortegnet for koefficienten a bestemmer om ligepunktet er ustabilt ($a > 0$) eller stabilt ($a < 0$) hvilket vil sige om løsningskurven er voksende eller aftagende.