Separable differentialligninger

For nogle få differentialligninger kan løsningen udledes bare ved kendskab til regnereglerne for differentiering som f.eks. var tilfældet for eksponentielle differentialligninger. Men for at kunne løse en bredere mængde af differentialligninger er der brug for andre metoder.

En af metoderne er *separation af de variable* der kan anvendes på differentialligninger hvor man kan separere de variable på hver side af lighedstegnet. Betragtes f.eks. differentialligningen:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$$

Som ved at introducere en hjælpevariabel $y = f(x)$ sammen med differentialkvotienten for den afledte funktion $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, kan differentialligningen omskrives til:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Bemærk at der her anvendes differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$ i stedet for y' da dette er nødvendigt for at kunne separere variablerne x og y i næste skridt.

For at separere variablerne x og y på hver side af ligningen behandles differentialkvotienten som en brøk af de to infinitesimaler dy og dx:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot dy = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot dx$$

For nu at bestemme stamfunktionen skal infinitesimalerne summeres op og en integrationskonstant hhv. k_1 og k_2 ligges til:

$$k_1 + \int \frac{1}{y} \cdot dy = k_2 + \int \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot dx$$

Herefter kan de ubestemte integraler på side af ligningen beregnes hvorefter variablen y isoleres:

$$\begin{aligned} & k_1 + \int \frac{1}{y} \cdot dy = k_2 + \int \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot dx \\ \Leftrightarrow \quad & \ln(y) = k_2 - k_1 + \tfrac{1}{4} \cdot x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{\ln(y)} = \mathrm{e}^{k_2 - k_1 + \frac{1}{4} \cdot x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \mathrm{e}^{k_2 - k_1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{4} \cdot x^2} \\ \Rightarrow \quad & y = k \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{4} \cdot x^2} \quad \text{hvor} \quad k = \mathrm{e}^{k_2 - k_1} \end{aligned}$$

Erstattes variablen $y = f(x)$ tilbage til funktionen er den generelle løsning herved fundet ved separation af variable til:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{4} \cdot x^2}$$

Metoden for separation af de variable kan generaliseres til tilfælde hvor en 1. ordens differentialligning kan opskrives som produktet af to udtryk g og h af hhv. $f(x)$ og x:

$$f'(x) = g(x) \cdot h\big(f(x)\big)$$

Ved brug af hjælpevariablen $y = f(x)$ omskrives ligningen til:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Variablerne kan nu separeres og integreres med tillæg af en integrationskonstant k hvilket giver følgende generelle formel for separation af de variable:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = k + \int g(x) \cdot dx$$

Separable differentialligninger

For en separabel differentialligning, som kan skrives på formen:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

kan løsningen bestemmes ved at omskrive differentialligningen med separation af de variable metoden til formen:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = k + \int g(x) \cdot dx$$

Her er k en integrationskonstant, der kan bestemmes ud fra en kendt startbetingelse eller funktionsværdi.