Logistisk vækst

Den logistiske vækstmodel betragter væksten af en population, hvor der er en begrænsende vækstbetingelse såsom plads, miljø eller næring, der sætter en begrænsning for hvor stor populationen kan blive.

Den logistiske vækst er en løsning til den generelle differentialligning:

$$f'(x) = f(x) \cdot \big(b - a \cdot f(x)\big)$$

hvor a og b er modellens konstanter som i tilfælde af den logistisk vækstmodel begge skal være positive.

Den generelle løsning til differentialligningen kan opnås ved en længere udledning som anvender separation af de variable metoden hvor resultater bliver:

$$f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + k \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot x}}$$

Her er k en integrationskonstant, der bestemmes ved brug af en yderligere betingelse omkring den specifikke løsning for at opnå denne.

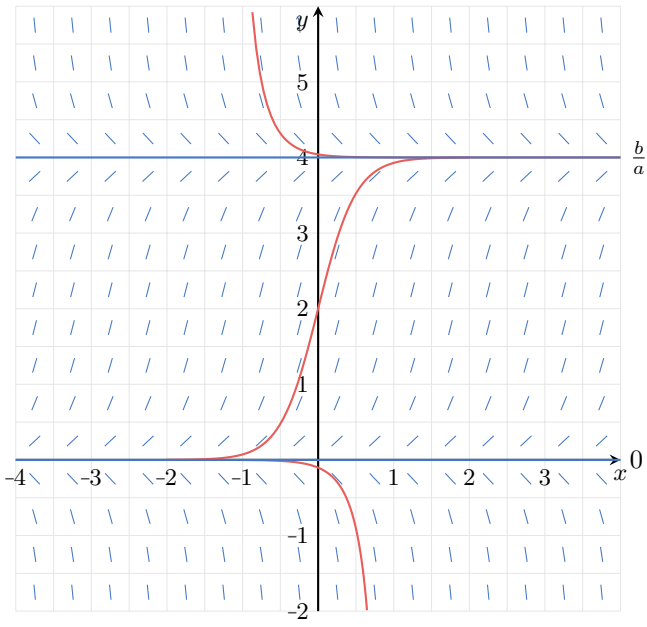
Omskrives differentialligningen ved brug af hjælpevariablerne $y = f(x)$ samt $y' = f'(x)$ tager ligningen følgende form:

$$y' = y \cdot \big(b - a \cdot y\big)$$

Det ses umiddelbart fra differentialligningens struktur, at ligevægtspunkterne, dvs. de værdier af y der opfylder $y' = 0$, kan bestemmes ved hjælp af nulreglen:

$$\begin{aligned} 0 = y \cdot \big(b - a \cdot y\big) \quad &\Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad b - a \cdot y = 0 \\ &\Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y = \tfrac{b}{a} \end{aligned}$$

Differentialligningen har altså ligevægtspunkterne $y = 0$ samt $y = \frac{b}{a}$ hvilket også ses på hældningsfeltet nedenfor hvor der ligeledes er plottet tre forskellige specifikke løsninger, der befinder sig i hver sin del af ligevægtslinjernes opdeling af hældningsfeltet. Logistiske vækstmodeller er løsninger der befinder sig mellem de to ligevægtslinjer.



Differentialligningen for logistisk vækst kan nu opsummeres i følgende sætning.

Differentialligning for logistisk vækst

Differentialligningen, der beskriver logistisk vækst, har en af følgende generelle former:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \big(b - a \cdot f(x)\big) \\ f'(x) &= a \cdot f(x) \cdot \big(c - f(x)\big) \quad \text{hvor} \quad b = a \cdot c \\ f'(x) &= b \cdot f(x) - a \cdot f(x)^2 \end{aligned}$$

hvor $a > 0$ og $b > 0$.
Den generelle/fuldstændige løsning til differentialligningen er:

$$f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + k \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot x}}$$

Her er k en reel talværdi, der bestemmes ud fra en specifik betingelse for løsningen.
Differentialligningen har to ligevægtspunkter. Et ustabilt $y = 0$ og et stabilt $y = \frac{b}{a}$ idet der gælder, at $a > 0$ og $b > 0$.