Eulers metode

Betragter man differentialligninger generelt findes der p.t. ikke en universiel metode til at løse disse analytisk. Eksempelvis er det en betingelse for at kunne anvende metoden for separation af de variable, at de variable kunne separeres på hver side af ligningen. Dette er ikke altid er tilfældet og der findes derfor en håndfuld andre metoder til at løse differentialligninger analytisk men hver af disse har sine begrænsninger ift. hvilke differentialligninger man kan løse.

En alternativ tilgang til de analytiske metoder er såkaldte numeriske metoder. Her bestemmer man ikke den funktion, der løser differentialligningen, men i stedet bestemmer man et relativt stort antal punkter, som ligger på eller tilnærmelsesvis på den funktion, der løser differentialligningen.

For at illustrere og validere Eulers metode vælges en differentialligning hvor man allerede kender den analytiske løsning som den numeriske løsning kan sammenlignes med.

Som eksempel betragtes differentialligningen:

$$f'(x) = 2 \cdot f(x)$$

For at lave en nummerisk beregning omskrives ligningen til en såkaldt *følge* af punkter $\big((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ...\big)$, i et fast inteval Δx så der gælder at:

$$x_i = i \cdot \Delta x \quad \text{og} \quad y_i = f\big(x_i\big) \quad \text{hvor} \quad i \in \big\{0, 1, 2, ...\big\}$$

Differentialligningen kan nu omskrives ift. notationen $y_i = f(x_i)$:

$$y_i' = 2 \cdot y_i$$

Udfordringen nu er, at størrelsen y_i' også skal kunne beregnes numerisk idet selve løsningsfunktionen f jo ikke er kendt. For at opnå en numerisk metode til at bestemme y_i' på betragtes selve definitionen af differentialkvotienten:

$$y_i' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)$$

En anden måde at opskrive dette på er:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

Og udtrykket for y_i' indsættes i differentialligningen $y_i' = 2 \cdot y_i$ hvilket giver:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = 2 \cdot y_i \qquad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

I denne ligning kan man nu isolere y_{i+1}, så der opnås en såkaldt *rekursionsligning*, hvor man kan beregne den næste værdi i følgen ud fra de foregående værdier:

$$y_{i+1} = 2 \cdot y_i \cdot \Delta x + y_i \qquad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

Ligningen gælder dog kun i grænsetilfældet hvor $\Delta x \to 0$ men ved at vælge en tilstrækkelig lille værdi af Δx kan man approximere y_{i+1} til en vilkårlig nøjagtighed.

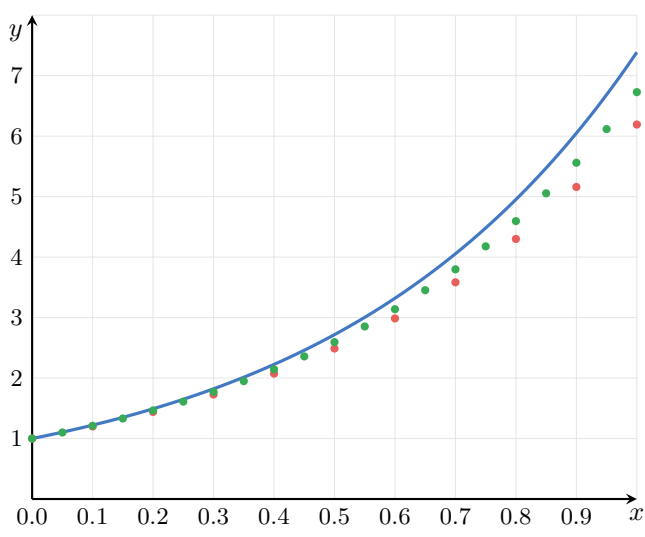
Dette illustreres ved at foretage den numeriske beregning af løsningen til differentialligningen med $\Delta x = 0.1$ og begyndelsesbetingelsen at $y_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1.00 \\
y_1 &= 2 \cdot y_0 \cdot \Delta x + y_0 = 2 \cdot 1.00 \cdot 0.1 + 1.00 = 1.20 \\
y_2 &= 2 \cdot y_1 \cdot \Delta x + y_1 = 2 \cdot 1.20 \cdot 0.1 + 1.20 = 1.44 \\
y_3 &= 2 \cdot y_2 \cdot \Delta x + y_2 = 2 \cdot 1.44 \cdot 0.1 + 1.44 = 1.728 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Den numeriske løsning til differentialligningen ved Eulers metode med $\Delta x = 0.1$ bliver altså:

$$\big((0.0, 1.00), (0.1, 1.20), (0.2, 1.44), (0.3, 1.728), ...\big)$$

Den beregnede numeriske løsning ved hhv. $\Delta x = 0.1$ (rød) og $\Delta x = 0.05$ (grøn) sammenlignes nu med den analytiske løsning (blå) i figuren nedenfor.

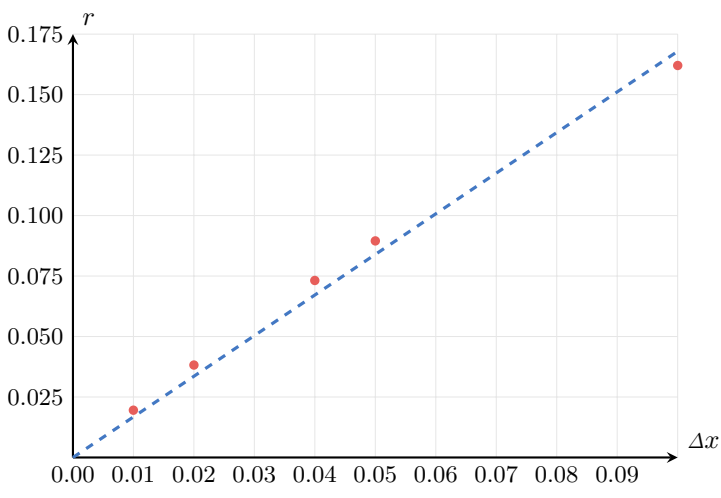


Som det kan ses af figuren, starter begge numeriske løsninger tæt på den analytiske men begynder herefter at afvige for større x-værdier. Det der dog er en vigtig observation er, at løsningen for $\Delta x = 0.05$, dvs. den hvor der anvendes flest beregningspunkter, er tættere på den analytiske løsning en løsningen for $\Delta x = 0.1$. Det er netop denne egenskab, at den numeriske løsning tilpasser sig den analytiske løsning når Δx bliver mindre, der gør Eulers metode anvendelig.

For at undersøge dette nærmere beregnes den relative afvigelse r_i mellem den numeriske y_i og den analytiske løsning $f(x_i)$ for et vilkårligt punkt i ved:

$$r_i = \frac{|f(x_i) - y_i|}{|f(x_i)|}$$

For at undersøge den relative afvigelse ved en bestemt x-værdi $x = x_*$ vil dette svare til at bestemme den relative afvigelse hvor $i = \frac{x_*}{\Delta x}$. I figuren nedenfor er den relative afvigelse (rød) ved $x_* = 1$ beregnet for forskellige værdier af Δx og ud fra disse punkter er der foretaget en proportional regressionslinje.



Det ses, at den relative afvigelse er tilnærmelsesvis proportional med størrelsen på Δx hvilket viser, at man ved Eulers metode kan opnå en vilkårlig lav fejl ved at vælge en tilstrækkelig lav værdi af Δx.

Så hvorfor vælger man så ikke en virkelig lav værdi for Δx for at være sikker på at man har så nøjagtig en beregning som muligt? Grunden til dette er, at jo lavere en værdi man vælger for Δx, jo flere punkter skal man beregne for at nå frem til en bestemt x-værdi. Antallet af punkter n der skal beregnes for at løsningen når frem til en bestemt x-værdi x_* kan beregnes ved:

$$n = \frac{x_*}{\Delta x}$$

Heraf ses at Δx forekommer i nævneren hvilket vil sige at når Δx bliver en lille talværdi bliver n stor en stor talværdi.

Størrelsen af n dvs. hvor mange punkter der skal beregnes i den numeriske løsning er med andre ord prisen for den numeriske beregning da den direkte kan omsættes til hvor lang tid og hvor meget strøm en computer bruger for at beregne løsningen.

Den relative afvigelse er i nedenstående figur plottet ift. antallet af beregningspunkter n for forskellige værdier af Δx.

