Optimering

Ud fra den aflede funktion er det relativt nemt, at bestemme en funktions monotoniforhold samt at finde minimum og maksimumpunkter. Dette gør differentialregning et oplagt værktøj til at løse optimeringsproblemer, som typisk går ud på at bestemme en funktions minimum- eller maksimumpunkt. For at illustrere et typisk optimeringsproblem fremsættes følgende eksempel.

En landmand har en mark, der støder op til et lige vandløb, hvor han gerne vil holde køer på en del af marken. Landmanden har 120 meter trådhegn til at indhegne et så stort et areal som muligt i form af en rektangel, hvor den ene side udgøres af vandløbet og de tre andre sider af trådhegnet. Bestem længde og bredde således at arealet bliver størst mulig.

Med variablerne x og y, der repræsenterer de to sidelængder på rektanglet, samt variablen A, der repræsenterer det areal som hegnet omkredser, kan man opstille to ligninger for hhv. længden af hegnet og arealet af rektanglen:

$$\begin{cases} 2 \cdot x + y = 120 \\ A = x \cdot y \end{cases}$$

Ligningerne reduceres til én ligning ved først, at omskrive den første ligning:

$$2 \cdot x + y = 120 \quad \Leftrightarrow \quad y = 120 - 2 \cdot x$$

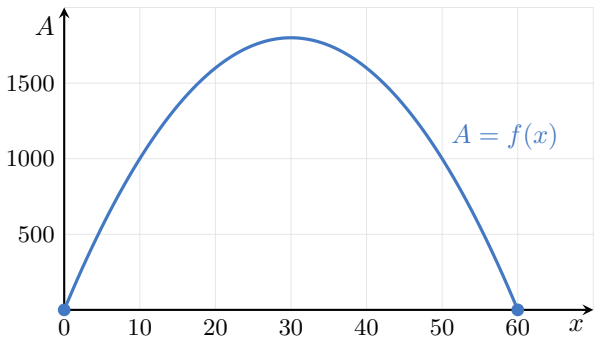
Ligningen kan nu bruges til at udskifte y-variablen i den anden ligning:

$$A = x \cdot (120 - 2 \cdot x) = 120 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

Arealet af indhegningen kan nu beregnes ved $A = f(x)$ hvor funktionen f har forskriften:

$$f(x) = 120 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

Grafen for funktionen $A = f(x)$ er en parabel med et enkelt maksimumpunkt som kan ses i figuren nedenfor.



Forskriften for den afledede funktion f' kan nu bestemmes ved at differentiere funktionsforskriften for f:

$$f'(x) = \left(120 \cdot x - 2 \cdot x^2\right)' = 120 - 4 \cdot x$$

Den afledede funktion beskriver altså hvordan arealet ændrer sig når sidelængden x ændrer sig. Idet grafen for funktionen $y = f(x)$ er en parabel med et maksimumpunkt, kan x-værdien for maksimumpunktet findes ved at løse ligningen $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 120 - 4 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 30$$

Det er heraf bestemt at den ene sidelængde x skal være 30 meter. Denne værdi kan nu indsættes i den oprindelige ligning for hegnets længde for at bestemme den anden sidelængde y:

$$2 \cdot 30 + y = 120 \quad \Rightarrow \quad y = 60$$

Heraf ses at den anden sidelængde y skal være 60 meter. Løsningen på optimeringsproblemet er altså et rektangel med sidelængderne af 30 og 60 meter hvor der skal opsættes hegn på de to sider af 30 meter samt en af siderne af 60 meter. Det samlede inhegnede areal kan nu bestemmes ved at indsætte de fundne sidelængder i ligningen for arealet:

$$A = 30 \cdot 60 = 1800$$

Det største areal, der kan indhegnes, er således beregnet til 1800 kvadratmeter.

Som det kan ses af eksemplet ovenfor indeholder løsningen af optimeringsproblemer ofte mange trin. For at få et overblik over en metode til at løse en del men ikke alle optimeringsproblemer opstilles følgende fremgangsmåde:

Løsning af optimeringsproblemer

Optimeringsproblem kan ofte men ikke altid løses ved følgende fremgangsmåde:

1. Hvis muligt tegn en skitse der giver et overblik over problemstillingen.
2. Undersøg hvilke variable der indgår i problemet og bestem hvilken variabel der skal minimeres/maksimeres m og hvilken variabel der skal optimeres x.
3. Anvend evt. information fra opgaven til at opstille ligninger der angiver sammenhængen mellem alle variablerne.
4. Reducer ligningerne til en enkelt ligning, der beskriver sammenhængen mellem den variabel, der skal minimeres/maksimeres og den variabel, der skal optimeres ved $m = f(x)$. Angiv forskriften for f.
5. Bestem minimum/maksimums punktet af optimeringsfunktionen f ved at løse ligningen $f'(x_{\text{opt}}) = 0$ for værdien x_{opt}.
6. Beregn minimum/maksimum-værdien af den variabel der skal minimeres/maksimeres ved $m_{\text{min}} = f(x_{\text{opt}})$.