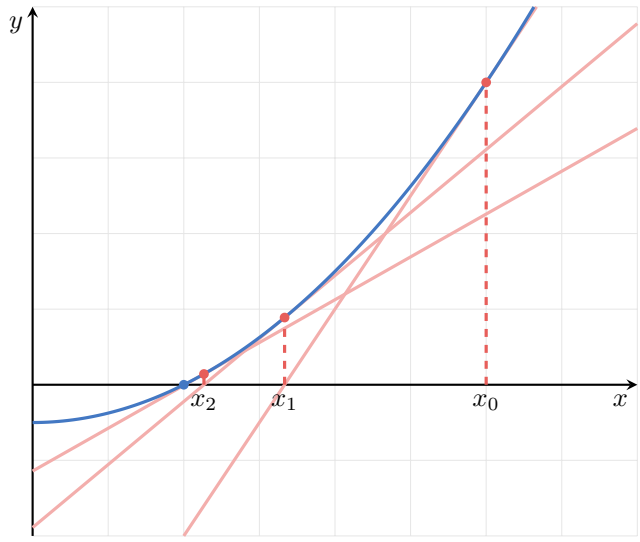
Newtons metode til bestemmelse af nulpunkter

Idet den afledte funktion i høj grad afspejler en funktions monotoniforhold, kan den også anvendes til at opstille i numeriske metoder til at bestemme særlige punkter på en graf som f.eks. nulpunkter dvs. de punkter hvor en funktions graf skærer 1.aksen og svarer til funktionens rødder.

En numerisk metode der netop anveder den afledte funktion til at bestemme en funktions nulpunkter er *Newtons metode* som er illustreret i figuren nedenfor for tre iterationer.



I Newtons metode bestemmes nulpunktet for en funktion ved at starte med en tilfældig x-værdi x_0. Ud fra denne startværdi beregnes funktionens tangent ved x_0 hvorefter tangentens nulpunkt bestemmes som det næste x-værdi x_1. Processen fortsættes med x_2, x_3, x_4, osv. indtil ændringen mellem to efterfølgende x_i-værdier er tilstrækkelig lille til at udgøre en acceptabel præcision for resultatet.

For at formulere Newtons metode betragtes ligningen for tangenten i startpunktet x_0:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Den næste x-værdi i følgen x_1 bestemmes nu som nulpunktet for tangenten dvs. ved at indsætte $x = x_1$ samt $y = 0$ i tangentens ligning:

$$0 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0)$$

Denne ligning (hvor der for nemheds skyld byttes rundt på højre- og venstresiden) kan nu omskrives til en formel for x_1 ved:

$$f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = -f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x-værdien efter første iteration x_1 kan altså beregnes ud fra startværdien x_0 ved:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Denne ligning kan nu generaliseres til en såkaldt *rekursionsligning* hvor den næste x-værdi x_{i+1} kan beregnes ud fra den forrige x_i ved:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newtons metode kan nu fremsættes ved følgende sætning:

Newtons metode

For en givet funktion f hvor $f(x)$ og $f'(x)$ er givet, kan nulpunktet bestemmes ved at udføre følgende algoritme:

1) Vælg en startværdi x_0 for $i = 0$ hvor $f'(x_0) \neq 0$.
2) Bestem næste værdi x_{i+1} ved:
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
3) Beregn den absolutte ændring mellem de to efterfølgende værdier $\varepsilon = |x_{i+1} - x_i|$.
4) Hvis ε er større end den acceptable afrundingsfejl gentag trin 2) og 3).

Det skal dog til sidst nævnes, at Newtons metode fejler såfremt $f'(x_i) = 0$ og der er bl.a. derfor generelt ingen garanti for at metoden nærmer sig et nulpunkt.