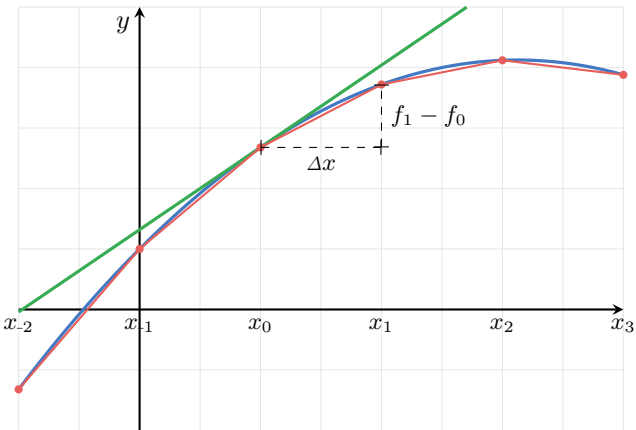


Differentialkvotienter

For at beregne hældningen for en vilkårlig kontinuær funktion f er en metode at betragte hældningen for den tilnærmede funktion af linjestykker. Hvis man f.eks. betragter hældningen af linjestykket mellem punkterne x_0 og x_1 vil denne kunne beregnes ved:

$$\frac{f_1 - f_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Hældningen af den tilnærmede funktion l kan nu anvendes til at finde hældningen for den oprindelige funktion f . Dette gøres på baggrund af at den tilnærmede funktion l konvergerer mod den opfindelige funktion f når $\Delta x \rightarrow 0$. Altså må hældningen af de to funktioner ligeledes konvergere når $\Delta x \rightarrow 0$.

For at bestemme denne grænseværdi betragtes grænseværdien for hældningen af den tilnærmede funktion l ved fikspunktet x_0 . Dette gøres fordi fikspunktet er uafhængigt af Δx og kan vælges til hvilken som helst værdi hvorved det kan bruges til at bestemme hældningen af den opfindelige funktion f ved en vilkårlig x -værdi. Det generelle begreb for hældning kaldes *differentialkvotienten* og defineres som:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

Notationen for differentialkvotienten $\frac{df}{dx}$ skal forstås som en helhed idet df og dx er infinitesimale (dvs. uendelige små) størrelser og det er derfor kun deres forhold der har en reel fortolkning. Notationen dx og df anvendes for at vise relationen til størrelserne Δx og Δf .

For at illustrere ræsonnementet bag begrebet om en differentialkvotient fremsættes følgende eksempel ved funktionen f med forskriften $f(x) = x^2$ hvor funktionens differentialkvotient (dvs. hældning) bestemmes ved $x = 3$.

For at tydeliggøre hvordan grænseværdien for differentialkvotienten vil se ud i dette tilfælde opstilles først en tabel hvor man kan se hvordan de enkelte dele af udtrykket konvergerer når Δx går mod 0.

Δx	1	0.1	0.01	0.001	...	$\rightarrow 0$
$f(3 + \Delta x)$	16	9.61	9.06	9.006	...	$\rightarrow 9$
$f(3 + \Delta x) - f(3)$	7	0.61	0.06	0.006	...	$\rightarrow 0$
$\frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$	7	6.1	6.01	6.001	...	$\rightarrow 6$

Her ses at både $\Delta x \rightarrow 0$ samt $f(3 + \Delta x) - f(3) \rightarrow 0$ men at forholdet mellem de to udtryk har grænseværdien:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \right) = 6$$

Herved kan det konkluderes at funktionens differentialkvotient ved $x = 3$ er:

$$\frac{df}{dx}(3) = 6$$

En anden måde at finde frem til dette resultat er ved at udlede det algebraisk fra selve definitionen af differentialkvotienten hvor der anvendes $x_0 = 3$:

$$\frac{df}{dx}(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \right)$$

Funktionsforkrifterne indsættes nu i ligningen og grænseværdien udregnes:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(3 + \Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{3^2 + \Delta x^2 + 2 \cdot 3 \cdot \Delta x - 3^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 6) = 6 \end{aligned}$$

I det sidste trin kan grænseværdien forholdsvis nemt bestemmes da det i dette tilfælde er muligt at indsætte værdien $\Delta x = 0$ direkte i udtrykket som herefter giver værdien 6. Dette stemmer også overens med den forrige konklusion, at funktionens differentialkvotient ved $x = 3$ er:

$$\frac{df}{dx}(3) = 6$$