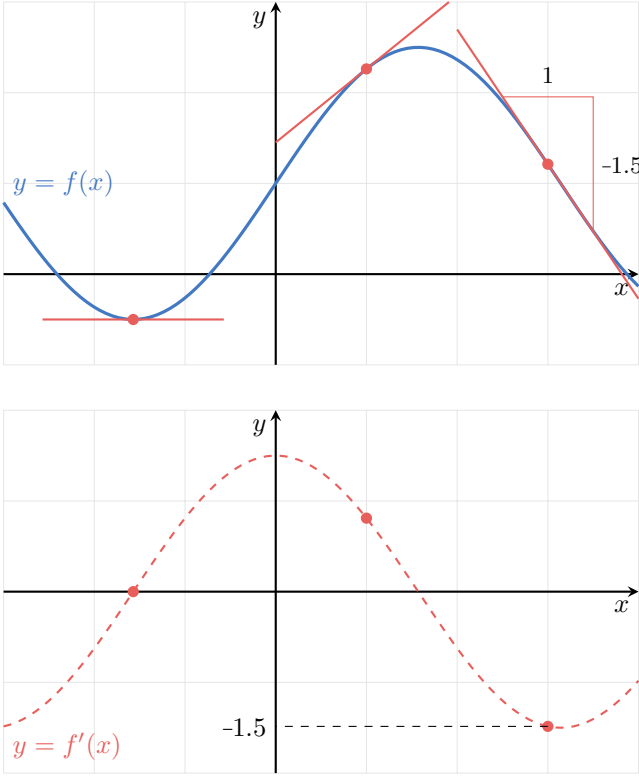


Afledte funktioner

Når man bestemmer differentialkvotienten af en funktion tager man udgangspunkt i et enkelt fikspunkt x_0 . Man kan dog vælge fikspunktet til hvilken som helst værdi i definitionsområdet for funktionen f . I figuren nedenfor ses, i den øverste graf, en funktion hvor tangentlinjen i tre forskellige punkter er vist med små linjestykker. I figurens nederste graf er hældningen, dvs. differentialkvotienten, for disse tangentlinjer afsat som punkter sammen med en stiplet linje, som viser den funktion, der angiver differentialkvotienten, dvs. hældningen, af funktionen f for hvert x -værdi.



Denne nye funktion for differentialkvotienten af f kaldes den *afledte funktion* og skrives ved f' , der læses som "f-mærke".

Algebraisk bestemmes den afledte funktion ved at indsætte variabelen x i differentialkvotienten:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

Ud fra definitionen af differentialkvotienten hvor x_0 altså nu er erstattet af x opnås en formel angiver hvordan den afledte funktion f' beregnes:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Bemærk her at den eneste forskel fra formlen for differentialkvotienten er, at værdien x_0 er erstattet af variabelen x . For at beregne den afledte funktion anvendes samme fremgangsmåde som for differentialkvotienten. I forlængelse af eksemplet for beregning af differentialkvotienten af funktionen $f(x) = x^2$ beregnes nu den afledte funktion f' .

Funktionsforkriften $f(x)$ anvendes i formlen for den afledte funktion til at opnå et konkret udtryk for funktionsværdierne $f(x + \Delta x)$ og $f(x)$ hvorefter grænseværdien udregnes:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + \Delta x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2 \cdot x) = 2 \cdot x \end{aligned}$$

Forskriften for den afledte funktion er således bestemt til $f'(x) = 2 \cdot x$.

Med stort set samme fremgangsmåde kan man ligeledes bestemme den afledte funktion af mange andre funktionstyper. De mest gængse funktioners afledte funktion er opsummeret i følgende sætning.

Afledte funktioner for simple funktioner

For en funktion f kan den afledte funktion f' bestemmes i følgende tilfælde af simple funktioner.

$$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

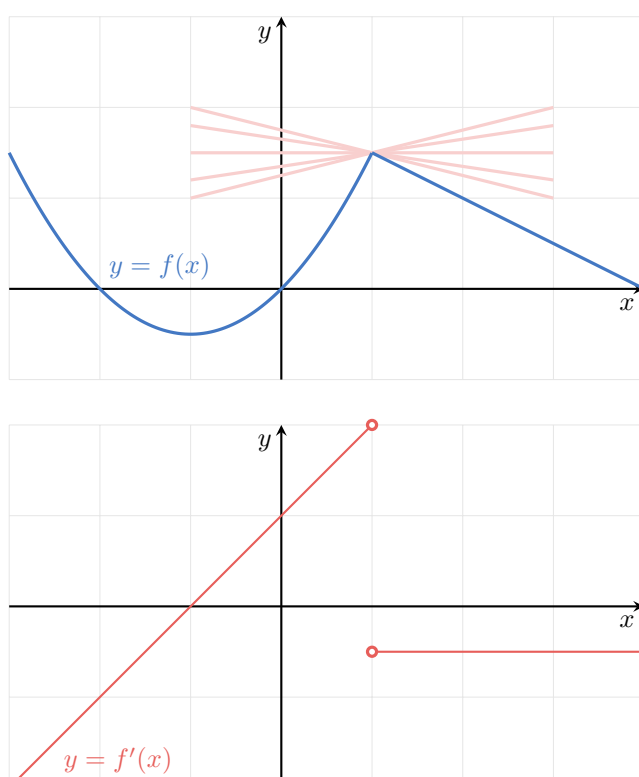
$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log_b(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}$$

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Differentiable funktioner

Det er ikke alle funktioner der kan differentieres. Dem der kan, kaldes differentiable funktioner hvilket betyder at man for hver værdi af x i definitionsområdet gælder at man kan bestemme en entydig værdi af den afledte funktion $f'(x)$. For at en funktion kan være differentiable skal den for det første være kontinuær dvs. sammenhængende. Derudover må den ikke have nogle knæk som gør det umuligt at bestemme en tangent med en entydig hældning. Problemet er vist i figuren nedenfor hvor funktionskurven har et knæk og derfor er det umuligt at bestemme en hældningen på tangenten i dette punkt.



Det ses ydermere i den nederste figur der viser den afledte funktion, at hvis en funktion har et knæk vil det betyde at dens afledte funktion ikke er kontinuær dvs. sammenhængende idet den i punktet for knækket vil springe fra en værdi til en anden uden at kunne bestemmes i selve punktet.

Dette betyder at betingelsen for at en funktion er differentiable er at dens afledte funktion være kontinuær. Denne betingelse kan formuleres ved brug af følgende grænseværdier:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x - \Delta x)) = f'(x) \quad \text{sam} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x + \Delta x)) = f'(x)$$