

Polynomier

Polynomier er en type af funktioner, der er særdeles anvendelige på grund af funktionernes systematiske struktur samt de egenskaber som dette medfører. De første fire typer af polynomier er polynomier af nulte, første, anden og tredje grad der kan skrives på følgende generelle normalformer:

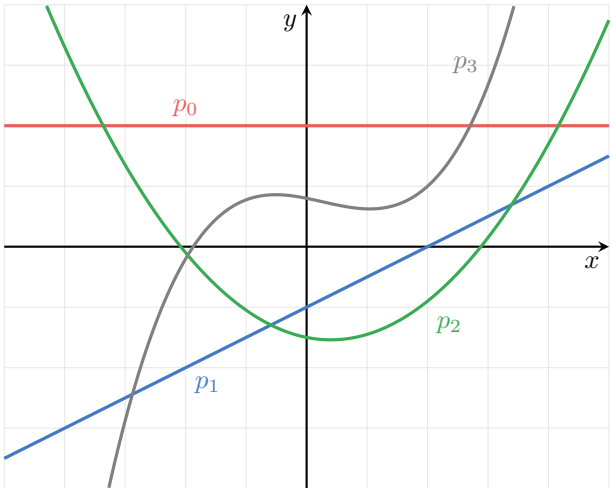
$$p_0(x) = a$$

$$p_1(x) = a \cdot x + b$$

$$p_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$p_3(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

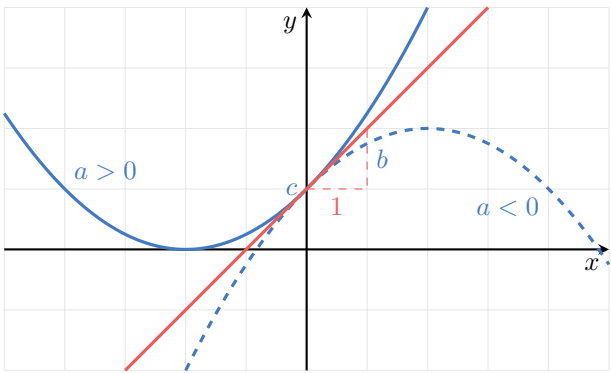
Som det kan ses er polynomiets grad bestemt af det største potenstal som x -variablen forekommer i. Grafen for de fire typer af polynomier vist i figuren nedenfor.



For et 2.gradspolynomium er den generelle form altså:

$$p_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Grafen for 2.gradspolynomiet $y = p_2(x)$ er en såkaldt parabel som vist i figuren nedenfor hvor koefficienternes grafiske betydning er illustreret.



Det ses at c -koefficienten er skæringsværdien på 2.aksen hvilket også kan se algebraiske ved at indsætte $x = 0$ i funktionen $f(0) = c$. Koefficienten b er hældningskoefficienten på tangentlinjen i skæringspunktet på 2.aksen. Koefficienten a er relateret til krumningen af parabelen hvilket vil sige at hvis $a > 0$ vil parabelen krumme/bøje opad hvorimod hvis $a < 0$ vil parabelen krumme/bøje nedad.

Polynomiers rødder

De værdier af x som løser ligningen $p(x) = 0$ kaldes polynomiets *rødder* og ydgør grafens skæringspunkter med 1.aksen. Antallet af reelle rødder til et polynomium kan højst være lig med polynomiets grad. Hvis polynomiets grad er et *ulige* tal har polynomiet mindst en rod. Hvis polynomiets grad derimod er et *lige* tal er det muligt at polynomiet slet ingen rødder har.

Dette kan bl.a. ses ved at betragte hvordan graferne for polynomier af lige og ulige grad opfører sig. Her bemærkes, at såfremt polynomiets grad er et lige tal peger den tilhørende grafs ender i samme retning, enten opad eller nedad. Hvis polynomiets grad derimod er et ulige tal har den tilhørende graf ender i hver sin retning, et opad og et nedad. Det er derfor uundgåeligt for grafen for et polynomium af ulige grad ikke at krydse førsteaksen mindst én gang hvilket vil sige at polynomiet har mindst en rod.

For et 2.gradspolynomium udgør ligningen $p_2(x) = 0$ netop en 2.gradsligning og rødderne x_1 og x_2 kan derfor beregnes ved den generelle løsning til 2.gradsligningen:

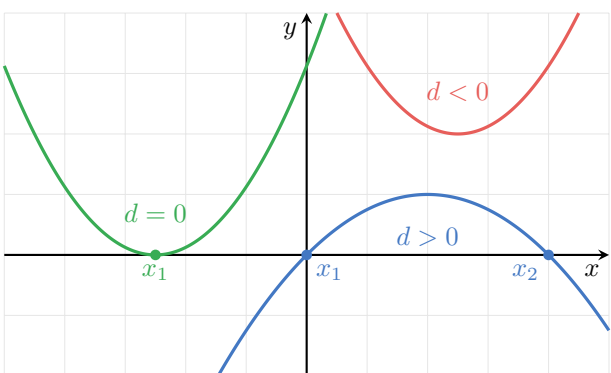
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Her er d diskriminanten beregnet ved:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Et 2.gradspolynomium kan derfor have enten ingen rødder, én rod eller to rødder alt efter om diskriminanten er hhv. negativ $d < 0$, nul $d = 0$ eller positiv $d > 0$.

I figuren nedenfor er den grafiske repræsentation af rødderne til et 2.gradspolynomium illustreret for de tre tilfælde hvor der er hhv. nul, én eller to rødder.



Bestemmelse af polynomiets forskrift ud fra dets rødder

Kender man de to rødder x_1 og x_2 samt koefficienten a for et 2.gradspolynomium, kan man bruge disse værdier til at bestemme forskriften for 2.gradspolynomiet ved:

$$p_2(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Denne metode bygger på at der for rødderne netop gælder at $p_2(x_1) = 0$ og $p_2(x_2) = 0$, hvilket også kan ses i følgende beregninger hvor de to rødder indsættes i forskriften ovenfor:

$$p_2(x_1) = a \cdot (x_1 - x_1) \cdot (x_1 - x_2) = a \cdot 0 \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

$$p_2(x_2) = a \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_2) = a \cdot (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$$

Forskriften for 2.gradspolynomiet hvor rødderne indgår kan omskrives til den generelle normalform for 2.gradspolynomiet ved:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &= a \cdot x^2 - a \cdot x \cdot x_2 - a \cdot x \cdot x_1 + a \cdot x_1 \cdot x_2 \\ &= a \cdot x^2 - a \cdot (x_1 + x_2) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Heraf ses, at de generelle koefficienter b og c også kan bestemmes ud fra rødderne ved:

$$b = -a \cdot (x_1 + x_2) \quad \text{og} \quad c = a \cdot x_1 \cdot x_2$$