

Omvendte funktioner (inverse funktioner)

Behovet for omvendte funktioner (også kaldet *inverse funktioner*) opstår typisk i situationer hvor man er interesseret i det omvendte udsagn. For at illustrere dette betragtes følgende udsagn om sammenhængen mellem vægten på en kasse med æbler givet antallet af æbler i kassen:

Vægten på en kasse med æbler er givet ved selve kassens vægt adderet med antallet af æbler gange 0.2 kg pr. æble.

Her vil det tilhørende omvendte udsagn angive sammenhængen mellem antallet af æbler i kassen givet vægten på en kasse med æbler:

Antallet af æbler i en kasse er givet ved vægten af kassen med æbler fratrukket vægten af kassen og derefter ganget med 5 æbler pr. kg.

Et konkret eksempel på behovet for en omvendt funktion er den omvendte sinus funktion $\arcsin$, som anvendes såfremt en vinkel skal bestemmes i tilfældet af at funktionsværdien $\sin(x)$ er kendt. Idet $\arcsin$ er den omvendte sinus funktion kan den også skrives ved notationen $\sin^{-1}$.

For at få en mere grundlæggende forståelse for omvendte funktioner kan en givet funktion f og dens omvendte funktion f^{-1} opstilles på tabelform:

Sammenhængen $y = f(x)$

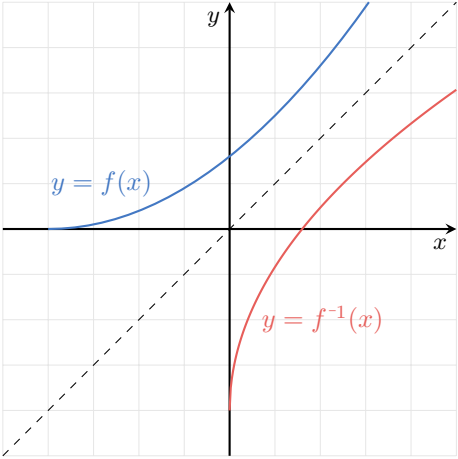
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Den omvendte sammenhæng $y = f^{-1}(x)$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Her ses det tydeligt, at der ift. den omvendte funktion er tale om en ombytning af 1. og 2. koordinaten i hvert koordinat-par.

Ift. den grafiske repræsentation af en invers funktion vil ombyttet af 1. og 2. koordinaten resultere i en spejling af funktionen omkring linjen $y = x$. Denne transformation har netop samme effekt som at bytte om på 1. og 2. akser i koordinatsystemet og er vist i figuren nedenfor.



En funktion f kan altså have en tilhørende omvendt funktion f^{-1} der transformerer en funktionsværdi $f(x)$ tilbage til det oprindelige element x . Denne egenskab kan skrives matematisk ved brug af sammensatte funktioner:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Hvis forskriften for den omvendte funktion skal bestemmes ud fra en bestemt funktion med forskriften $f(x)$ er det hensigtsmæssigt at introducere en hjælpevariabel y som man kan benytte sig af til følgende udledning:

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Det ses heraf, at forskriften for f^{-1} ift. variabelen y , kan aflæses som højresiden af ligningen. Ud fra dette kan man opstille følgende fremgangsmåde til at bestemme forskriften for den omvendte funktion:

1. Ud fra funktionsforskriften $f(x)$ opstil ligningen: $f(x) = y$.
2. For at opnå en ligning, der angiver den omvendte sammenhæng, ombyttes variablerne x og y .
3. Variabelen y isoleres nu på den ene side af ligheden, hvoraf funktionsforskriften for den omvendte funktion f^{-1} , er givet ved den modsatte side af ligheden dvs. på formen $y = f^{-1}(x)$.
4. Evt. check om der gælder at $f^{-1}(f(x)) = x$.

Eksempel

For at illustrere metoden betragtes følgende eksempel hvor der er givet funktionen f med forskriften:

$$f(x) = 2 \cdot x$$

Ud fra funktionsforskriften $f(x)$ opstilles ligningen: $f(x) = y$:

$$2 \cdot x = y$$

For at opnå ligningen der angiver den omvendte sammenhæng ombyttes variablerne x og y :

$$2 \cdot y = x$$

Variabelen y isoleres i ligningen så den har formen $y = f^{-1}(x)$ hvorefter forskriften for den omvendte funktion kan aflæses:

$$\begin{aligned} 2 \cdot y = x &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x \\ &\Leftrightarrow y = f^{-1}(x) \quad \text{hvor} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x \end{aligned}$$

Til sidst checkes om der gælder at $f^{-1}(f(x)) = x$:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x) = x$$

Det kan altså heraf konkluderes, at forskriften for den omvendte funktion er $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x$.