

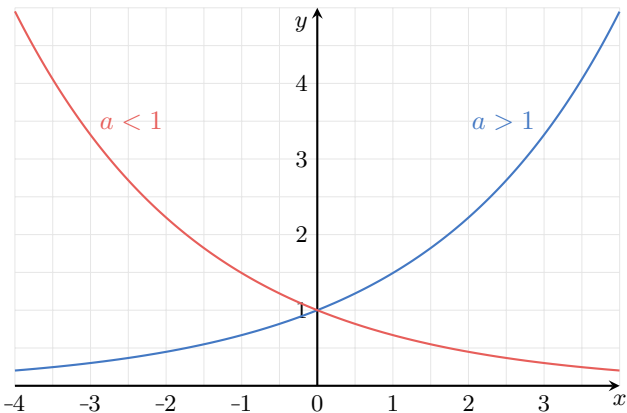
Eksponentielle funktioner

Eksponentielle funktioner er funktioner, der kan skrives på følgende generelle normalform:

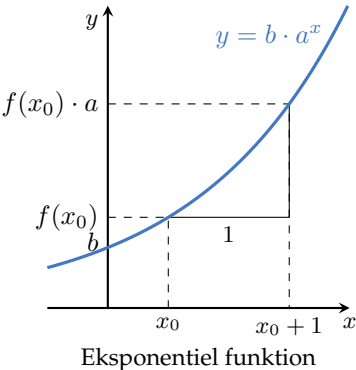
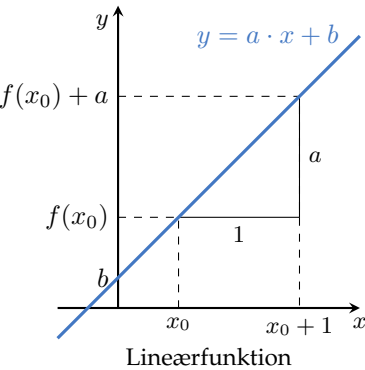
f(x) = b · a^x hvor a > 0

Koefficienten a kaldes grundtallet og repræsenterer fremskrivningsfaktoren af funktionsværdien. Koefficienten b angiver funktionsgrafens skæringsværdi på 2.aksen, hvilket kan ses ved at indsætte x = 0 i forskriften hvilket giver f(0) = b · a^0 = b.

Ud fra grundtallet a kan man direkte bestemme om funktionen er aftagende eller tiltagende. Såfremt 0 < a < 1 er funktionen aftagende i hele definitions-mængden og såfremt a > 1 er funktionen voksende i hele definitions-mængden. I figuren nedenfor er der vist to eksempler på eksponentielle funktioner hvor en er aftagende og en er faldende.



Forskellen på en lineærfunktion og en eksponentiel funktion er illustreret i figuren nedenfor. For en lineærfunktion, der er kendetegnet ved en konstant hældning a, vil funktionsværdien, for hver enhed man går ud ad x-aksen, adderes med værdien a så en funktionsværdi f(x_0) vil stige til f(x_0) + a. For en eksponentiel funktion, der ændrer sig med en konstant væksthastighed a, vil funktionsværdien, for hver enhed man går ud ad x-aksen, ganges med værdien a så en funktionsværdi f(x_0) vil stige til f(x_0) · a.



Den generelle form for eksponentielle funktioner indeholder to koefficienter a og b hvilket gør, at man ud fra to kendte punkter på funktionens graf kan bestemme værdierne på de to koefficienter - en såkaldt to-punkts-formel.

To-punkt-formel for eksponentielle funktioner

For eksponentielle funktioner på den generelle normalform:

f(x) = b · a^x hvor a > 0

kan de to koefficienter a og b bestemmes ud fra to kendte punkter A = (A_x, A_y) og B = (B_x, B_y), som man ved ligger på funktionens graf y = f(x) ved:

a = ((B_y / A_y)^(1 / (B_x - A_x))) og b = (A_y / (a^A_x))

Bemærk her at formlen for a-koefficienten kræver at A_y ≠ 0 samt at B_x ≠ A_x.

I mange sammenhæng forekommer den bestemte eksponentielle funktion med Eulers tal e = 2.71828... som grundtal. Denne særlige funktion kaldes eksponentialfunktionen og skrives ofte som:

exp(x) := e^x hvor e = 2.71828...

Eksponentialfunktionen har den særlige egenskab, at den stiger med samme rate som dens funktionsværdi. Dette gør at netop denne funktion dukker op i mange forskellige anvendelser.

Eksponentiel vækst

En typisk anvendelse af eksponentielle funktioner er den eksponentielle vækstmodel. Her betragtes en størrelse y, som ændrer sig afhængigt af tiden t med en konstant vækstrate. Vækstmodellen kan derfor beskrives ved en funktion y = f(t) hvor funktionsforskriften har den generelle normalform:

f(t) = b · a^t

Funktionsværdien er kendetegnet ved at funktionsværdien ændrer sig med en konstant vækstrate. Dette gør at man kan beregne hvor lang tid, der skal gå før funktionsværdien har opnået en bestemt væksthastighed k. Betragtes to tidspunkter t_1 og t_2 hvor forholdet mellem funktionsværdierne er lig med væksthastigheden k:

f(t_2) / f(t_1) = k

Ved at indsætte den generelle funktionsforskrift for en eksponentiel funktion opnås ligningen:

(b · a^t_2) / (b · a^t_1) = k ⇔ a^t_2 / a^t_1 = k ⇔ a^t_2 - t_1 = k

Udtrykket for tidsforskellen t_2 - t_1 erstattes med værdien T_k som herefter isoleres ved at tage logaritmen på begge sider af ligningen:

a^T_k = k ⇔ log(a^T_k) = log(k) ⇔ T_k · log(a) = log(k) ⇔ T_k = (log(k) / log(a))

Værdien k = 2 svarer til en væksthastighed på 200% og den tilsvarende tid T_2 kaldes derfor fordoblingskonstanten. På tilsvarende vis svarer værdien k = 1/2 til en væksthastighed på 50% og den tilsvarende tid T_1/2 kaldes derfor halveringskonstanten.

Eksponentielle funktioner

En eksponentiel funktion kan opskrives på følgende generelle normalform:

f(x) = b · a^x hvor a > 0

Hvis a < 1 er funktionen aftagende med en halveringskonstant:

T_1/2 = (log(1/2) / log(a))

Hvis a > 1 er funktionen stigende med en fordoblingskonstant:

T_2 = (log(2) / log(a))