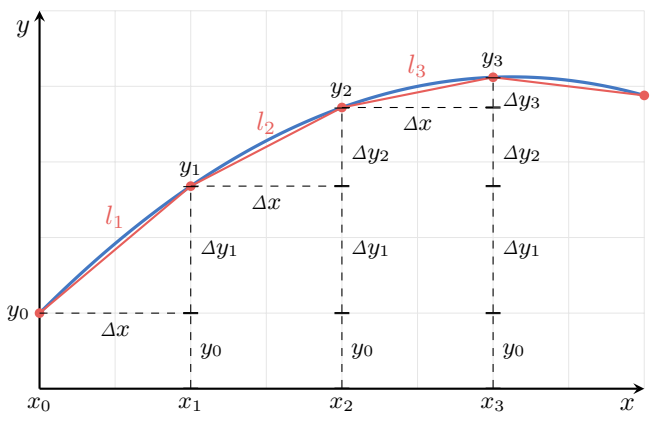
Integralsummer

Integraler er i mange henseende den modsatte operation til det at bestemme en funktions afledte funktion ved differentiering. Dette vil sige at hvis man kender den afledte funktion kan man bruge integraler til at bestemme selve funktionen også kaldet *stamfunktionen*. Mere specifikt anvendes den type der kaldes et *ubestemt integrale*.

For at forstå princippet bag det ubestemte integrale betragtes figuren nedenfor. Her er først indtegnet en funktion f (blå kurve) samt dens tilnærmede funktion af linjestykker l (røde punkter og linjer).



Af figuren kan det ses at de afsatte punkter på funktionskurven (x_1, y_1), (x_2, y_2), osv. kan beregnes på en alternativ måde ved eksempelvis at starte med startværdien y_0 og derefter lægge Δy_1 til for at få y_1:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

Tilsvarende hvis man vil beregne y_2, y_3, osv. kan man gøre det ved:

$$y_2 = y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2$$
$$y_3 = y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3$$

I midlertid er det dog ikke så brugbart at anvende værdierne Δy_1, Δy_2, osv. til denne beregning da disse typisk er ukendte størrelser. Antages herimod at hældningen for hvert linjestykke l_1', l_2', osv. er kendte kan man anvende disse til at erstatte Δy_1, Δy_2, osv. i beregningen. Dette kan gøres fordi at hældningen nemlig er forholdet mellem Δy og Δx. For det første linjestykke l_1 er hældningen l_1' givet ved:

$$l_1' = \frac{\Delta y_1}{\Delta x}$$

Ud fra dette kan man isolere Δy_1 for at opnå et udtryk med hældningen l_1', der kan erstatte Δy_1 i den ovenstående beregning:

$$\Delta y_1 = l_1' \cdot \Delta x$$

På tilsvarende vis gælder det for de andre Δy-værdier at:

$$\Delta y_2 = l_2' \cdot \Delta x \qquad \Delta y_3 = l_3' \cdot \Delta x \qquad \text{osv.}$$

De tre funktionsværdier y_1, y_2, y_3 kan nu beregnes ud fra kendskab til startværdien y_0 samt hældningen på linjestykkerne ved:

$$y_1 = y_0 + l_1' \cdot \Delta x$$
$$y_2 = y_0 + l_1' \cdot \Delta x + l_2' \cdot \Delta x$$
$$y_3 = y_0 + l_1' \cdot \Delta x + l_2' \cdot \Delta x + l_3' \cdot \Delta x$$

Det ses heraf at man kan formulere et generelt udtryk for værdien y_n efter n intervaller ved brug af notationen for en række:

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n} l_i' \cdot \Delta x$$

Den tilhørende x-værdi for det n'te punkt vil være:

$$x_n = n \cdot \Delta x$$

Ud fra denne relation kan man opnå et udtryk for n ved:

$$x_n = n \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{x_n}{\Delta x}$$

Det skal her bemærkes, at idet n er et heltal antages det, at Δx vælges således, at $\frac{x_n}{\Delta x}$ er et helt tal. Funktionsværdien $f(x_n) = y_n$ kan således bestemmes ved:

$$f(x_n) = y_0 + \sum_{i=1}^{\frac{x_n}{\Delta x}} l_i' \cdot \Delta x$$

Dette er en såkaldt diskret beregning, hvor det kun er et udvalg af punkterne på funktionskurven, der kan beregnes, som f.eks. vist ved nedenstående tabel hvor $\Delta x = 0.1$:

n	0	1	2	3	4	...
x_n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	...
l_n'	–	17	10	4	-3	...
$l_n' \cdot \Delta x$	–	1.7	1.0	0.4	-0.3	...
$f(x_n)$	1.0	2.7	3.7	4.1	3.8	...

Som sagt kan den ovenstående metode altså kun beregne en tabel over udvalgte funktionsværdier men altså ikke selve funktionsforskriften $f(x)$. En anden ulempe er at det kræver ligeledes, at man har kendskab til hældningen af alle linjestykkerne l_1', l_2', osv. hvilket sjældent er tilfældet.

Begge disse ulemper kan dog løses ved at beregne grænseværdien af den ovenstående summation hvor intervallængden Δx er uendelig lille:

$$f(x) = y_0 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=1}^{\frac{x}{\Delta x}} l_i' \cdot \Delta x \right)$$

I dette grænsetilfælde, hvor $\Delta x \to 0$ kan man nu erstatte hældningen på linjestykket af den tilnærmede funktion l_i' med funktionens afledte funktionsværdi $f'(x)$. Derudover introduceres en mere simpel notation for summationen hvor der nu anvendes uendelig små intervaller og derfor samtidig skal summere over uendeligt mange intervaller, hvilket kaldes en *kontinuær* sum. I notationen for en kontinuær sum anvendes symbolet $\int$ for summationen og størrelsen dx, der er det infinitesimale sidestykke til Δx:

$$f(x) = k + \int f'(x) \cdot dx$$

Det bemærkes ydermere, at startbetingelsen y_0 er erstatet af en mere generel konstant k, som kaldes for *integrationskonstanten*.

Ud fra den opnåede ligning kan det ses, at såfremt forskriften $f'(x)$ for den afledte funktion er givet, så kan forskriften for den oprindelige funktion $f(x)$ bestemmes ved at udregne det ubestemte integrale af $f'(x)$ og derefter bestemme talværdien for integrationskonstanten k.