Stamfunktioner

Begrebet *stamfunktion* er mere eller mindre det omvendte af begrebet *afledt funktion*. Dette vil sige, at en funktion F er stamfunktion til en anden funktion f, hvis f er den afledte funktion af F. Ofte bruges notationen F om stamfunktionen til f, men derudover gælder at:

$$\begin{aligned} F \text{ er stamfunktion til } f \quad &\Rightarrow \quad f \text{ er afledt funktion til } F \\ f \text{ er stamfunktion til } f' \quad &\Rightarrow \quad f' \text{ er afledt funktion til } f \\ f' \text{ er stamfunktion til } f'' \quad &\Rightarrow \quad f'' \text{ er afledt funktion til } f' \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

En stamfunktion F kan bestemmes ved det ubestemte integrale af dens afledte funktion f samt en integrationskonstant k ved:

$$F(x) = k + \int f(x) \cdot dx$$

Det skal dog ydermere gælde, at når en stamfunktion F differentieres skal det resultere i dens afledte funktion f. Dette forhold kan testes ved brug af den såkaldte *integrationsprøve*, som netop foreskriver denne relation ved:

$$\Big(F(x)\Big)' = f(x)$$

For at eftervise at det ubestemte integrale netop er den omvendte operation af differentiering indsættes ovenstående udtryk for $F(x)$ i integrationsprøven hvormed det nu kan udledes at:

$$\begin{aligned} \Big(F(x)\Big)' = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(k + \int f(x) \cdot dx\right)' = f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(k\Big)' + \left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x) \end{aligned}$$

Heraf gælder altså at:

$$\left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x)$$

Ud fra denne ligning kan det ses, at hvis man først integrerer en funktionsforskrift $f(x)$ og dernæst differentierer dette, vil man finde tilbage til selve funktionsforskriften $f(x)$. Dette er netop tilfældet, idet integrationskonstanten k ikke bidrager til den afledede funktion.

> ***Integrationsprøven***
> Differentiering og integrering er *omvendte* operationer for hinanden. Der gælder derfor at:
>
> $$\left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x)$$

Til eksempel betragtes funktionen f med forskriften $f(x) = \cos(x)$ hvorfra man vil bestemme dens stamfunktion F. Ud fra ovenstående egenskab skal der altså gælde at:

$$\left(\int \cos(x) \cdot dx\right)' = \cos(x)$$

Herudover bemærkes det, at cosinusfunktionen netop opstår når man differentierer sinusfunktionen jf. de tidligere opstilte regneregler for differentiering:

$$\Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x)$$

Sammenlignes nu disse to relationer, ses det, at begge er opfyldt såfremt:

$$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x)$$

Integralet af cosinusfunktionen kan nu anvendes til at opstille den uspecifikke ligning for stamfunktionen ved:

$$F(x) = k + \sin(x)$$

Stamfunktionen er stadig uspecifik idet integrationskonstanten stadig er ubekendt.

For at bestemme integrationskonstanten k og derved opnå en specifik stamfunktion, er der brug for en yderligere betingelse om stamfunktionen. Typisk er denne information givet ved en randbetingelse såsom en startværdi eller slutværdi for funktionen.

I eksemplet bestemmes nu den specifikke stamfunktion, der opfylder startbetingelsen $F(0) = 1$. Dette gøres ved at indsætte betingelsen $F(0) = 1$ i forskriften og derefter udlede integrationskonstanten k:

$$F(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad k + \sin(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

Herved er stamfunktionen der opfylder $F(0) = 1$ bestemt ved forskriften:

$$F(x) = 1 + \sin(x)$$

I figuren nedenfor er princippet om integrationskonstanten illustreret. Samtlige kurver der er indtegnet opfylder alle at den afledte funktion er $f(x) = \cos(x)$ men der er kun én funktion, der opfylder betingelsen at $F(0) = 1$. Denne funktion, som også er fremhævet i figuren, har netop integrationskonstanten $k = 1$.

