Integrering

Ligesom den afledte funktion af funktioner kunne bestemmes ved at betragte differentiering som en operation, så kan stamfunktionen bestemmes ved den modsatte operation kaldet *integrering*. Notationen for integrerings-operationen er:

$$\int \big(...\big) \cdot dx$$

Her er det udtryk som skal integreres (kaldet *integranden*) erstattet af $(...)$. Så hvis man f.eks. skal integrere udtrykket x^2 vil man skrive:

$$\int x^2 \cdot dx$$

For at beregne resultatet af integrationen er der brug for nogle regneregler som kan udledes ud fra regnereglerne for differentiering kombineret med egenskaben at:

$$\left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x)$$

For nogle tilfælde kan regnereglen for differentiering af et udtryk direkte omskrives til en regneregel for integrering, som f.eks. for cosinusfunktionen:

$$\left(\int \cos(x) \cdot dx\right)' = \cos(x) \quad \wedge \quad \Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x)$$
$$\Rightarrow \quad \int \cos(x) \cdot dx = \sin(x)$$

For andre tilfælde kræver regnereglen for differentiering en omskrivning før den kan anvendes. F.eks. kan regnereglen for integration af udtrykket x^n udledes som følger.

Regnereglen for differentiering af et potensudtryk er:

$$\big(x^m\big)' = m \cdot x^{m-1}$$

Her er m et vilkårligt heltal, som man nu kan erstatte med $m = n + 1$ hvor n også er et heltal.

$$\big(x^{n+1}\big)' = (n+1) \cdot x^n \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{n+1} \cdot \big(x^{n+1}\big)' = x^n$$
$$\Leftrightarrow \quad \Big(\tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\Big)' = x^n$$

Herfra kan regnereglen for integration af udtrykket x^n (hvor $n \neq -1$) opnås ved:

$$\left(\int x^n \cdot dx\right)' = x^n \quad \wedge \quad \Big(\tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\Big)' = x^n$$
$$\Rightarrow \quad \int x^n \cdot dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Ved en tilsvarende fremgangsmåde kan man nu opstille en tabel for integrering af et udvalg af simple udtryk.

Integrering af simple udtryk

I nedenstående tabel er integrering af simple udtryk angivet hvor x er udtrykkets variabel, n og a er konstante talværdier, og e $= 2.71828...$ er Eulers tal:

$\int a \cdot dx = a \cdot x$	$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$\int x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^2$	$\int \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot x^{1.5}$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(x)$	$\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x)$
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$	$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x)$
$\int \mathrm{e}^x \cdot dx = \mathrm{e}^x$	$\int \ln(x) \cdot dx = x \cdot \big(\ln(x) - 1\big)$

Sideløbende med tabellen for integrering af de simple udtryk er der ligeledes brug for nogle basale regneregler for at kunne håndtere mere komplicerede udtryk.

Regneregler for integrering

For en konstant s samt to udtryk $h(x)$ og $g(x)$, der begge indeholder variablen x, kan der opstilles følgende regneregler for integrering:

1. *Adderede funktioner*:
$$\int \Big(h(x) + g(x)\Big) \cdot dx = \int h(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$$
2. *Skalerede funktioner*:
$$\int s \cdot h(x) \cdot dx = s \cdot \int h(x) \cdot dx$$
3. *Multiplicerede funktioner (partiel integration)*:
$$\int h(x) \cdot g(x) \cdot dx = h(x) \cdot \int g(x) \cdot dx - \int \left(h'(x) \cdot \int g(x) \cdot dx\right) \cdot dx$$
4. *Sammensatte funktioner*:
   Se efterfølgende afsnit om metoden: *integration ved substitution*.
   Særtilfælde:
$$\int g'(x) \cdot h\big(g(x)\big) \cdot dx = \int h(t) \cdot dt$$
   hvorefter $t = g(x)$ indsættes i resultatet.

Anvendelsen af ovenstående regneregler for integrering illustreres ved følgende eksempel, hvor det ønskes at bestemme følgende ubestemte integrale:

$$\int \Big(2 \cdot x^2 + x - 5\Big) \cdot dx$$

Udtrykket integreres ved at integrere ledene hver for sig, hvor evt. konstanter sættes uden for integrationstegnet:

$$\begin{aligned}
\int \Big(2 \cdot x^2 + x - 5\Big) \cdot dx &= \int 2 \cdot x^2 \cdot dx + \int x \cdot dx - \int 5 \cdot dx \\
&= 2 \cdot \int x^2 \cdot dx + \int x \cdot dx - 5 \cdot \int 1 \cdot dx \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x
\end{aligned}$$

Resultatet af integrationen er heraf bestemt til:

$$\int \Big(2 \cdot x^2 + x - 5\Big) \cdot dx = \tfrac{2}{3} \cdot x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x$$