Integration ved substitution

Integration ved substitution er en metode der bruges til at håndtere integraler hvor integranden kan betragtes som to sammensatte funktioner.

Anvendelsen af integration ved substitution metoden illustreres ved følgende eksempel hvor der ønskes at bestemme følgende ubestemte integrale:

$$\int \cos\left(2 \cdot x\right) \cdot dx$$

Dette gøres ved at gennemføre de ovenstående punkter:

1) For at opnå et integrale som nemt kan bestemmes, anvendes en ny variabel z til at omskrive integranden. I dette tilfælde ses det, at man kan betragte integranden som et sammensat udtryk med $2 \cdot x$ som det indre udtryk, så det virker som et oplagt udtryk for den nye variabel z:

$$z = 2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad \cos\left(2 \cdot x\right) = \cos\left(z\right)$$

2) I intergralet skal dx tilsvarende omskrives i form af dz. Til dette anvendes differentialkvotienten:

$$\frac{dz}{dx} = \Big(2 \cdot x\Big)' = 2 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2} \cdot dz$$

3) Integralet kan nu omskrives i form af variablen z som herefter kan integreres:

$$\begin{aligned} \int \cos\left(2 \cdot x\right) \cdot dx &= \int \cos\left(z\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \cos\left(z\right) \cdot dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin\left(z\right) \end{aligned}$$

Heraf opnås resultatet af integralet men udtrykt ved variablen z:

$$\int \cos\left(2 \cdot x\right) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(z\right)$$

4) Til sidst anvendes udtrykket for hjælpevariablen z nemlig $z = 2 \cdot x$ til at omskrive resultatet så det er udtrykt ved variablen x:

$$\int \cos\left(2 \cdot x\right) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot x\right)$$

Ovenstående eksempel på integration af en sammensat funktion ved substitution viser, at der er mere tale om en metode end en decideret regneregel. Der findes dog særtilfælde hvor metoden kan opskrives som en regneregel. Disse særtilfælde er når integranden kan skrives på formen $g'(x) \cdot h\big(g(x)\big)$ hvorefter integrationen kan bestemmes ved:

$$\int g'(x) \cdot h\big(g(x)\big) \cdot dx = \int h(z) \cdot dz$$

hvorefter $z = g(x)$ indsættes i resultatet.

Et eksempel på dette særtilfælde er følgende integrale:

$$\int 2 \cdot x \cdot \cos\left(x^2\right) \cdot dx$$

Her ses at integranden netop kan skrives på formen $g'(x) \cdot h\big(g(x)\big)$ hvor den indre funktion er $g(x) = x^2$ og den ydre funktion er $h(x) = \cos\left(x\right)$.

Den ovenstående regneregel kan nu anvendes til at bestemme integralet ved substitutionen $z = x^2$:

$$\int 2 \cdot x \cdot \cos\left(x^2\right) \cdot dx = \int \cos\left(z\right) \cdot dz = \sin\left(z\right)$$

Herefter indsættes $z = x^2$ i resultatet hvorved integralet er bestemt:

$$\int 2 \cdot x \cdot \cos\left(x^2\right) \cdot dx = \sin\left(x^2\right)$$