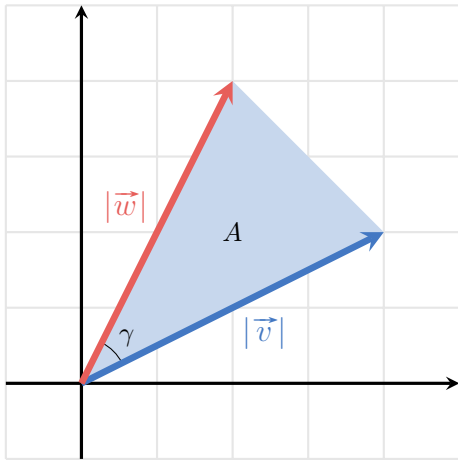


Arealet mellem to vektorer

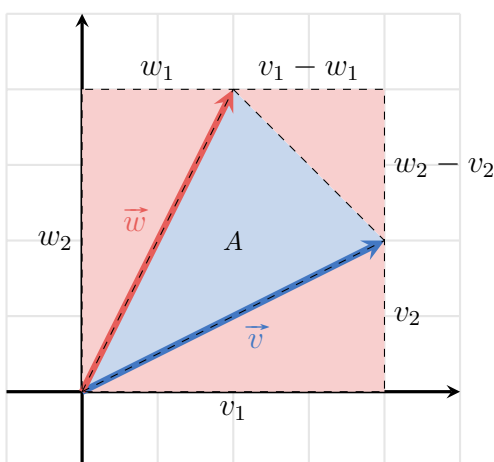
Når to ikke-parallele vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ sættes sammen i et vektorpar vil disse udspænde et trekantet areal mellem sig. På polær form er vektorernes længder givet samt deres retningsvinkler hvoraf man nemt kan bestemme den absolutte vinkel mellem vektorerne ved $\gamma = |\beta - \alpha|$. Arealet mellem vektorerne kan herfra beregnes ved at betragte figuren nedenfor.



Af figuren ses, at der i den polære form netop er givet en vinkel i trekanten samt længderne af de to hosliggende sidelængder. Dette gør at man kan anvende arealformlen for en vilkårlig trekant hvilket giver:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\gamma)$$

På kartesisk form hvor vektorernes komponenter er givet kan man beregne den udspændte trekants areal ved at betragte figuren nedenfor.



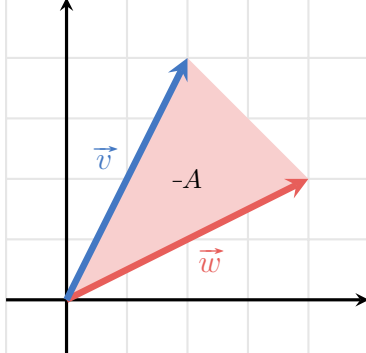
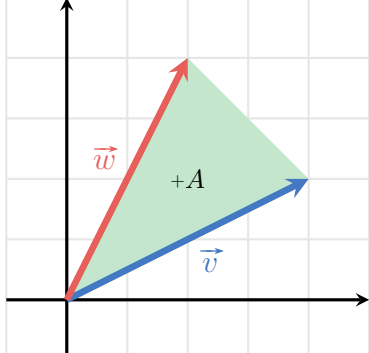
Her er vektorernes udspændte areal (blå) sammensat med tre retvinklede trekanter (rød) så de tilsammen udgør et rektangel med arealet $A_{\text{rekt}} = v_1 \cdot w_2$. For at bestemme vektorernes udspændte areal trækkes de tre retvinklede trekanters areal fra rektanglest areal ved:

$$\begin{aligned} A &= v_1 \cdot w_2 - \left(\frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot v_2 + \frac{1}{2} \cdot w_1 \cdot w_2 + \frac{1}{2} \cdot (v_1 - w_1) \cdot (w_2 - v_2) \right) \\ &= v_1 \cdot w_2 - \frac{1}{2} \cdot (v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 + (v_1 - w_1) \cdot (w_2 - v_2)) \\ &= v_1 \cdot w_2 - \frac{1}{2} \cdot (v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 + v_1 \cdot w_2 - v_1 \cdot v_2 - w_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2) \\ &= v_1 \cdot w_2 - \frac{1}{2} \cdot (v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2) \end{aligned}$$

Herved opnås altså formelen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2)$$

Det viser sig dog, at denne formel har en lidt besynderlig egenskab – nemlig at hvis man bytter rundt på de to vektorer så vinklen mellem dem får en negativ omløbsretning bliver arealet også negativt, som vist på figuren nedenfor.

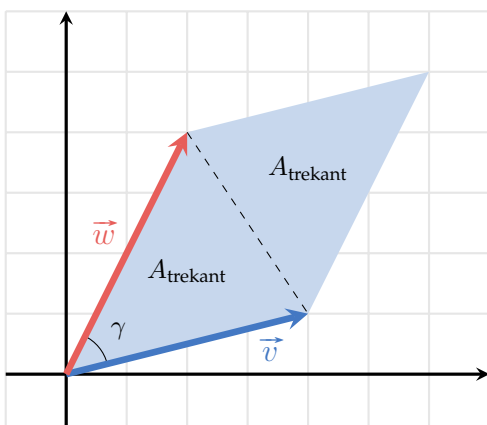


I nogle sammenhænge er denne egenskab ikke så tosset fordi ligesom et papir har et areal to sider og fortegnet af det beregnede areal fortæller hvilken side af arealet man kigger på. Et positivt areal betyder at forsiden vender opad og et negativt areal betyder at bagsiden vender opad.

Hvis man imidlertid ikke behøver informationen af hvilken side, der vender opad, men bare er interesseret i selve arealets størrelse, kan man anvende formelen med den absolutte værdi ved:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2|$$

Ud fra arealet af vektorernes udspændte trekant kan man også beregne arealet af det udspændte parallelogram. Som det kan ses i figuren nedenfor kan arealet af vektorernes udspændte parallelogram nemt beregnes som det dobbelte areal af den udspændte trekant idet diagonalen mellem vektorernes endepunkter opdeler parallelogrammet i to lige store arealer.



Formlen for arealet af vektorernes udspændte parallelogram kan derfor beregnes ved at gange den udspændte trekants areal med to:

$$\begin{aligned} A_{\text{paral}} &= 2 \cdot A_{\text{trekant}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2| \\ &= |v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2| \end{aligned}$$

Dette giver formelen for arealet af vektorernes udspændte parallelogram:

$$A_{\text{paral}} = |v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2|$$

For to vektorer givet på kartesisk form $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ kan arealet af den trekant som er udspændt af de to vektorer beregnes ved:

$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot |v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2|$$

Arealet af det parallelogram som er udspændt af de to vektorer kan beregnes ved:

$$A_{\text{paral}} = |v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2|$$

Eksempel

For en specifik trekant ABC er to af trekantens sidelængder givet ved de to afstandsvektorer:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Trekantens areal A kan beregnes ved:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot |AB_1 \cdot AC_2 - AC_1 \cdot AB_2| \\ A &= \frac{1}{2} \cdot |2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4| = \frac{1}{2} \cdot |-26| = 13 \end{aligned}$$

Arealet af trekanten er herved bestemt til: $A = 13$