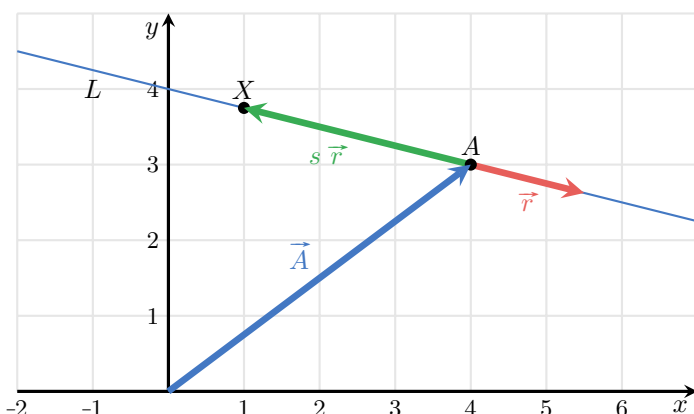


Linjers parameterfremstilling

Kombinationen af vektoraddition og vektorskalering kan anvendes til at bestemme en ret linje ved en såkaldt *parameterfremstilling*. Dette er illustreret i figuren nedenfor.



For en ret linje der går igennem punktet $A = (A_x, A_y)$ og har en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$, der angiver hældningen på linjen, kan stedvektoren for samtlige punkter på linjen gives ved parameterfremstillingen:

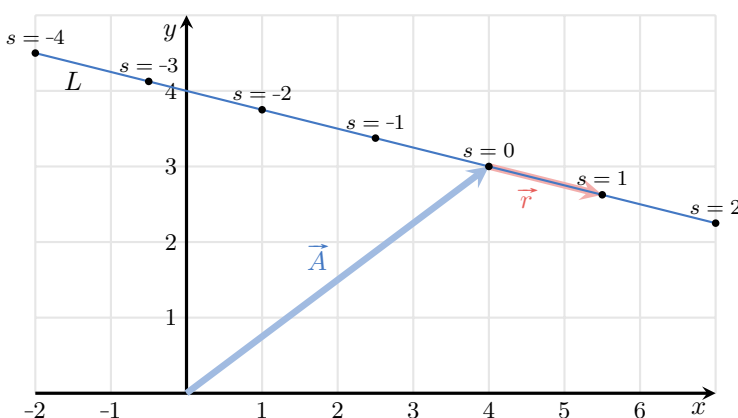
$$\vec{x} = \vec{A} + s \vec{r}$$

hvilket også kan skrives på komponentformen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

Parameteren s er den såkaldte *frie parameter* der fungerer som en skalering af retningsvektoren. Tilsammen fungerer skalaren s og retningsvektoren $\vec{r}$ som en afstandsvektor mellem punktet A og et vilkårligt punkt X på linjen.

Den frie parameter s kan forstås som en slags ny akse der angiver positionen på selve linjen som det ses i figuren nedenfor:



For en ret linje der går igennem to givne punkter A og B kan afstandsvektoren $\vec{AB}$ anvendes som retningsvektor. Parameterfremstillingen af linjen kan derfor bestemmes ved:

$$\vec{x} = \vec{A} + s \vec{AB}$$

hvilket også kan skrives på komponentformen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix}$$

Såfremt der ønskes en parameterfremstilling af linjestykket mellem punkterne A og B kan dette gøre ved at begrænse skalaren til intervallet $s \in [0, 1]$. På denne måde vil $s = 0$ svare til stedvektoren for punktet A , $s = 1$ svare til stedvektoren for punktet B , $s = 0.5$ svare til stedvektoren for punktet halvvejs mellem punkt A og B osv.

Linjers parameterfremstilling kan nu opsummeres i sætningen:

Linjers parameterfremstilling

For en linje, der går gennem punktet $A = (A_x, A_y)$ og som har en retningsvektor $r = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$, kan linjen bestemmes som en parameterfremstilling ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

For en linje, der går gennem de to punkter $A = (A_x, A_y)$ og $B = (B_x, B_y)$, kan linjen bestemmes som en parameterfremstilling ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix}$$

Punkter på linjen

Givet en linje der er angivet ved en parameterfremstilling på den generelle normalform:

$$\vec{x} = \vec{A} + s \vec{r}$$

For at undersøge om et givet punkt $P = (P_x, P_y)$ ligger på linjen skal det afklares om der findes en værdi for den frie parameter s , der opfylder vektorligningen:

$$\vec{P} = \vec{A} + s \vec{r}$$

Vektorligningen kan i denne sammenhæng betragtes som et ligningssystem med én variabel s , hvor der således skal undersøges om løsningen af de to ligninger giver en entydig værdi for s :

$$\begin{cases} P_x = A_x + s \cdot r_x \\ P_y = A_y + s \cdot r_y \end{cases}$$

Såfremt der findes en entydig værdi for s kan det konkluderes at punktet P ligger på linjen. Såfremt der ikke findes en entydig værdi af den frie parameter s kan det ligeledes afvises at punktet P ligger på linjen.

Skæring af to rette linjer

For at undersøge to rette linjers skæringsforhold betragtes to rette linjer der er angivet med parameterfremstilling på følgende form:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{A} + s \vec{a} \\ \vec{x} &= \vec{B} + t \vec{b} \end{aligned}$$

Det bemærkes her, at der nu er to frie parametre s og t . De to rette linjer skærer hinanden såfremt der findes en entydig værdi for hhv. s og t der resulterer i samme stedvektor $\vec{x}$ i begge ligninger.

Dette svarer til at betragte følgende vektorligning for ift. at bestemme en værdi for hhv. s og t :

$$\vec{A} + s \vec{a} = \vec{B} + t \vec{b}$$

Vektorligningen kan i denne sammenhæng betragtes som et ligningssystem med to variable s og t :

$$\begin{cases} A_x + s \cdot a_x = B_x + t \cdot b_x \\ A_y + s \cdot a_y = B_y + t \cdot b_y \end{cases}$$

Såfremt der findes en entydig værdi af både s og t for hvilke alle ligningerne er opfyldt kan det konkluderes at linjerne skærer hinanden. Såfremt der ikke findes en entydig værdi for både s og t , der opfylder alle ligningerne, kan det konkluderes, at linjerne *ikke* skærer hinanden.