

Udregning og reduktion af udtryk

For at forstå regnearterne og i hvilken rækkefølge man skal udregne dem er det hensigtsmæssigt at indse, at der faktisk kun findes én regneart – nemlig addition hvilket vil sige at lægge to talværdier sammen. De andre regnearter er essentielt en forkortet notation for en længere række af additioner. F.eks. er notationen for potens 3^2 en forkortet notation for multiplikationen $3 \cdot 3$ som igen er en forkortet notation for additionen $3 + 3 + 3$.

Indførslen af disse forkortede notifikationer kan kun ske såfremt, der ligeledes indføres et hierarki for hvilken regneart, der skal udregnes først når talværdien af et udtryk skal bestemmes. Dette behov illustreres ved følgende eksempel hvor talværdien skal beregnes af følgende udtryk:

$$1 + 4 \cdot 2 + 3^2$$

Idet potensen 3^2 er en forkortet notation for $3 \cdot 3$ omskrives udtrykket til:

$$1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3$$

Idet multiplikationen $4 \cdot 2$ er notation for $4 + 4$ og $3 \cdot 3$ er notation for $3 + 3 + 3$ omskrives udtrykket til:

$$1 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 = 18$$

Den korrekt udregnede værdi er altså lig med 18.

Betragt nu tilfældet hvor den forkortede notation ikke håndteres før talværdierne udregnes. Således udregnes det samme udtryk på den **forkerte** måde som:

$$1 + 4 \cdot 2 + 3^2 = 5 \cdot 5^2 = 25^2 = 625 \quad (\text{Forkert})$$

Der opnås altså en mærkant større og forkert beregnet værdi hvilket viser vigtigheden i, at de regnearter som essentielt set er en forkortet notation (dvs. multiplikation og potenser) udregnes først. Rækkefølgen som skal overholdes kaldes *regnearternes hierarki*.

Regnearternes hierarki

Ved udregning af et udtryk som indeholder regnearterne potens, multiplikation og addition skal følgende rækkefølge overholdes:

- 1) Først udregnes potenser (og rødder samt logaritmer),
 - 2) dernæst udregnes multiplikation (og division),
 - 3) til sidst udregnes addition (og subtraktion).
- *) Såfremt en regneoperation virker på en parentes skal udtrykket i parentesen udregnes først.

Som det ses af hierarkiet er der en tillægsregel, der angiver hvordan parenteser skal håndteres. Parenteser bruges nemlig som en måde at trumfe hierarkiets rækkefølge i de tilfælde hvor der er behov for dette.

Brugen af parenteser illustreres ved følgende eksempel:

Talværdien skal beregnes af følgende udtryk:

$$(2 + 3) \cdot 2^2$$

Først udregnes potensen da denne er højest i regnearternes hierarki:

$$(2 + 3) \cdot 2^2 = (2 + 3) \cdot 4$$

Herefter foreskriver regnearternes hierarki at der skal multipliceres, men idet der multipliceres med en parentes skal denne udregnes først. Derfor udregnes det resterende ved:

$$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

Reduktion

Hvis der i et udtryk optræder ukendte tal, kan talværdien af dette udtryk ikke beregnes direkte. Dog kan udtrykket i mange tilfælde reduceres til et enklere udtryk. Også her gælder det om at forstå hvordan den forkortede notation for multiplikation og potens fungerer for at vide om et udtryk kan reduceres.

Betragt f.eks. følgende udtryk hvor a er en ukendt talværdi:

$$a + 2 \cdot a$$

Idet notationen: $2 \cdot a$ er en forkortet notation for: $a + a$ kan udtrykket omskrives ved:

$$a + 2 \cdot a = a + (a + a) = a + a + a = 3 \cdot a$$

Et tilsvarende eksempel kan gives med multiplikation og potens for udtrykket: $a \cdot a^2$ hvor en reduktion kan ske ved:

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Der findes dog også udtryk som ikke kan reduceres som f.eks. udtrykket: $2 + a$. Dette skyldes at man essentielt ikke kan lægge en kendt og en ukendt talværdi sammen. Et andet eksempel er udtrykket: $a + a^2$. Udtrykket kan omskrives til: $(1 + a) \cdot a$ så også her er man forhindret i ikke kan lægge en kendt og en ukendt talværdi sammen, og kan udtrykket derfor ikke reduceres til færre end to led.