

Omskrivning af algebraiske ligninger

En ligning er et matematisk udsagn, der ved lighedsrelationen (symbolet =) angiver, at udtrykket på venstre side af lighedstegnet repræsenterer den samme talværdi som udtrykket på højre side af lighedstegnet. Ud fra denne betragtning kan der opstilles nogle regler for hvilke omskrivninger, der er gyldige for ligninger.

Betragter man f.eks. ligningen $4 = 4$ er denne åbenlyst sand, idet der står samme talværdi på begge sider af lighedstegnet. Lægges nu talværdien 1 til på begge sider af lighedstegnet vil talværdien stadig være lige stor på begge sider og man kan heraf udlede at:

$$4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + 1 = 4 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + 1 = 5$$

Man kan altså ud fra denne udledning også sige, at $4 + 1 = 5$ er sandt.

Erstatter man nu venstresiden på den oprindelige ligning med en ukendt værdi x således at der står $x = 4$ kan man gøre samme udledning som før hvor man lægger talværdien 1 til på begge sider:

$$x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 4 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 5$$

Udledningen siger, at hvis $x = 4$ så er $x + 1 = 5$.

Dette eksempel er dog en smule atypisk idet den indledende ligning faktisk angiver talværdien for den ukendte x . Et mere typisk problem kunne være at man vidste at ligningen $x + 1 = 5$ er sand og heraf ville udlede talværdien af x . Dette kan gøres ved at trække talværdien 1 fra på begge sider:

$$x + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 - 1 = 5 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Hvis $x + 1 = 5$ så må der gælde at $x = 4$.

I forskellen på de to ovenstående udledninger ligger en vigtig pointe. For at komme fra $x = 4$ til $x + 1 = 5$ blev der lagt talværdien 1 til på begge sider af ligningen, hvorimod der, for at komme fra $x + 1 = 5$ til $x = 4$, blev trukket talværdien 1 fra. Der er altså udført den direkte omvendte omregning ved de to udledninger, idet det omvendte af at lægge talværdien 1 til er at trække talværdien 1 fra. Dette er en vigtig pointe for at forstå hvordan man løser en ligning ved direkte omskrivning.

En ligning kan altså betragtes som selve løsningen, der er pakket ind i en række af omregninger. Betragter man f.eks. ligningen $2 \cdot x + 1 = 5$ kan denne fremkomme på følgende måde hvor løsningen $x = 2$ hvor der først er ganget med 2 og derefter lagt 1 til:

$$\begin{aligned} x = 2 & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = 2 \cdot 2 \\ & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = 4 \\ & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x + 1 = 4 + 1 \\ & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x + 1 = 5 \end{aligned}$$

Løsningen kendes dog ikke på forhånd men opnås ved at udføre de omvendte omregninger hvilket vil sige først at trække 1 fra og derefter dividere med 2:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 1 = 5 & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x + 1 - 1 = 5 - 1 \\ & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = 4 \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2} \\ & \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \end{aligned}$$

Fjerner man mellemregningerne fra udledningen kan man se, at man har opnået implikationen:

$$2 \cdot x + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Sprogligt kan denne implikation læses som:

$$\begin{aligned} & \text{Hvis det gælder at } 2 \cdot x + 1 = 5 \\ & \text{så gælder det også at } x = 2 \end{aligned}$$

Ud fra denne implikation har man nu fundet frem til, at den ukendte talværdi x er lig med 2 hvormed ligningen er løst.

Reglerne for omskrivning af ligninger, ved addition og multiplikation, kan opsummeres ved følgende sætning.

Omskrivning af ligninger

Hvis to vilkårlige udtryk a og b er lig med hinanden, kan begge udtryk omskrives med udtrykket c ved følgende regler og derefter stadig være lig med hinanden:

$$\begin{aligned} a = b & \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c \\ a = b & \quad \Leftrightarrow \quad a - c = b - c \\ a = b & \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot a = c \cdot b \quad \text{hvor } c \neq 0 \\ a = b & \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad \text{hvor } c \neq 0 \end{aligned}$$

I nogle tilfælde vil én ligning kunne omskrives til en *disjunktion* af to forskellige ligninger, dvs. et *enten/eller* udtryk. Et eksempel på dette er når et udtryk er givet i 2.potens som f.eks. ligningen $x^2 = 4$. Her kan man umiddelbart se, at $x = 2$ vil afstemme ligningen, men ved nærmere eftertanke vil $x = -2$ også være en mulighed for at afstemme ligningen. Man kan derfor udlede et *enten/eller* udtryk:

$$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{4} \quad \vee \quad x = -\sqrt{4}$$

Princippet kan generaliseres til følgende sætning.

Rødder af et kvadrat

Hvis kvadratet af et vilkårligt udtryk a er lig et positivt udtryk b (dvs. $b \geq 0$) kan fortegnet af udtrykket a ikke bestemmes direkte heraf:

$$a^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{b} \quad \vee \quad a = -\sqrt{b}$$

Et andet eksempel på en ligning, der kan omskrives til en disjunktion, er den såkaldte nulregel. Nulreglen siger, at når to udtryk ganget sammen giver nul så må det gælde at et eller begge udtryk er lig med nul. Et eksempel på dette er ligningen $(x + 1) \cdot (x - 1) = 0$ som kan omskrives ved nulreglen:

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$$

Nulreglen kan generaliseres til følgende udtryk:

Nulreglen

Såfremt produktet af to vilkårlige udtryk a og b er lig med nul er det ensbetydende med at et eller begge udtryk er lig nul:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

Test af løsningen til en ligning

En løsning kan testes ved at indsætte de fundne værdier i den oprindelige ligning - hvis ligningen reducerer til et udsagn der er sandt er løsningen korrekt.

Betragt f.eks. følgende ligning hvor det skal undersøges om $x = 2$ er en løsning til ligningen:

$$3 \cdot x = 8 - x$$

Ved at anvende en konjunktion af de to ligninger kan det udledes om løsningen er korrekt:

$$3 \cdot x = 8 - x \quad \wedge \quad x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 2 = 8 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 6$$

Ergo idet ligningen $6 = 6$ er sand kan det konkluderes at $x = 2$ er en korrekt løsning til den oprindelige ligning.

Det undersøges herefter om $x = 3$ også er løsning til ligningen. Dette gøres ved at erstatte den ubekendte talværdi x med talværdien 3 i ligningen:

$$3 \cdot x = 8 - x \quad \wedge \quad x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3 = 8 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 5$$

Heraf ses, at $x = 3$ resulterer i en usand ligning $9 = 5$ og det kan derfor konkluderes at $x = 3$ *ikke* er en løsning til den oprindelige ligning.