

Linjen gennem to punkter

En linje L i et koordinatsystem kan bestemmes ved at opstille en ligning for koordinatsystemets variable x og y .

En *lodret* linje vil bestå af alle de punkter hvor x -koordinaten er en konstant talværdi. F.eks. vil den lodrette linje, der skærer x -aksen i talværdien A_x være bestemt ved ligningen:

$$x = A_x$$

Tilsvarende vil en *vandret* linje bestå af alle de punkter hvor y -koordinaten er en konstant talværdi. F.eks. vil den vandrette linje, der skærer y -aksen i talværdien A_y være bestemt ved ligningen:

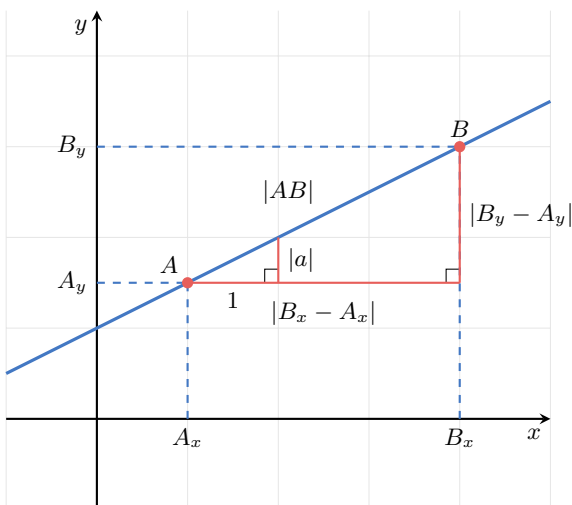
$$y = A_y$$

Er linjen derimod hverken lodret eller vandret, vil den bestå af alle de punkter hvor der er en lineær sammenhæng mellem x -koordinaten og y -koordinaten hvorved både x - og y -variablen vil indgå i ligningen. Sådanne ligninger skrives på den generelle form hvor y -variablen er bestemt ved en lineær funktion af x -variablen:

$$y = a \cdot x + b$$

Her angiver a -koefficienten linjens hældning og b -koefficienten linjens skæringsværdi på y -aksen.

Såfremt en ret linje L går igennem de to punkter (A_x, A_y) og (B_x, B_y) er det muligt at bestemme linjens ligning, ved at betragte figuren nedenfor.



På figuren ses, at hvis $A_x \neq B_x$ dvs. hvis linjen ikke er lodret, kan man danne en retvinklet trekant med katetelængderne $|B_x - A_x|$ og $|B_y - A_y|$. Til denne retvinklede trekant kan man danne en ensvinklet trekant med katetelængderne 1 og $|a|$ hvor a er hældningskoefficienten. Da de to trekanter er ensvinklede er forholdet mellem kateterne den samme i begge trekanter og man kan derfor opstille følgende ligning:

$$\frac{|a|}{1} = \frac{|B_y - A_y|}{|B_x - A_x|} \quad \Leftrightarrow \quad |a| = \frac{|B_y - A_y|}{|B_x - A_x|}$$

Denne ligning er dog begrænset til altid at bestemme den positive værdi af hældningskoefficienten idet man betragter længderne som jo kun kan være positive talværdier. Ligningen kan dog nemt tilpasses til også at kunne tage højde for negative hældninger ved at fjerne kun at betragte differencen mellem koordinaterne i stedet for længderne:

$$a = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}$$

Når a -koefficienten er bestemt kan b -koefficienten også bestemmes. Dette gøres ved at anvende den generelle form for linjens ligning $y = a \cdot x + b$ til at opstille ligningen for punktet A , idet punktets koordinater skal opfylde linjens ligning:

$$A_y = a \cdot A_x + b$$

Denne ligning omskrives herefter således, at der opnås en formel for skæringskoefficienten b :

$$A_y = a \cdot A_x + b \quad \Leftrightarrow \quad b = A_y - a \cdot A_x$$

De ovenstående formler kan nu opsummeres i følgende sætning der kaldes linjens topunktsformel:

Linjens topunktsformel

En linje, der går gennem de to punkter (A_x, A_y) og (B_x, B_y) hvor $A_x \neq B_x$ er bestemt ved en ligning på den generelle normalform:

$$y = a \cdot x + b$$

Koefficienterne a og b kan bestemmes ud fra punkternes koordinater ved:

$$a = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} \quad \text{og} \quad b = A_y - a \cdot A_x$$

Koefficienten a kaldes for *hældningskoefficienten* da denne angiver hældningen på linjen og koefficienten b kaldes for *skæringskoefficienten* da denne angiver ved hvilken værdi linjen skærer y -aksen.