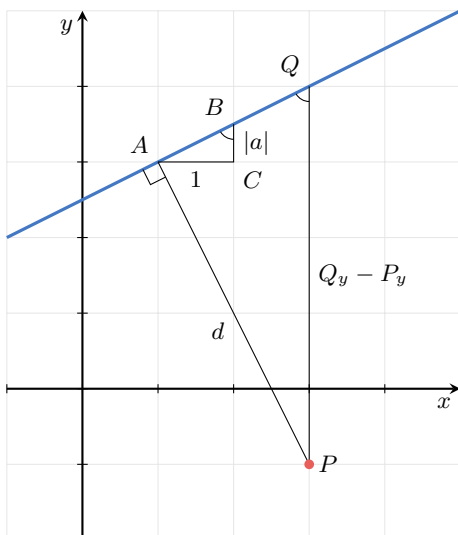


Afstanden mellem et punkt og en ret linje

For et givet punkt $P = (P_x, P_y)$ og en ret linje givet ved den generelle ligning $y = a \cdot x + b$ kan en formel for den korteste afstand mellem punktet og linjen udledes ved at betragte nedenstående figur.



Fra punktet P er der afsat et lodret linjestykke til et punkt Q på linjen hvorefter der dannes den retvinklede trekant APQ hvor punktet A er punktet på linjen der har den korteste afstand til P .

I tillæg dannes linjens hældningstrekanter ABC hvor kateterne er hhv. vandret med en enhedslængde 1 og lodret med længden svarende til hældningskoefficienten af linjen.

De lodrette sidelængder i hhv. trekant ABC og APQ er parallelle og danner derfor samme vinkel til linjen. Da begge trekanter tilmed er retvinklede er de lignedannede hvorved følgende skaleringsforhold kan opstilles:

$$\frac{d}{1} = \frac{|PQ|}{|AB|}$$

Idet sidelængden PQ er lodret er afstanden $|PQ| = |Q_y - P_y|$. Afstanden $|AB|$ udgør hypotenusen i den retvinklede trekant ABC og kan bestemmes ved Pythagoras' sætning:

$$|AB|^2 = |a|^2 + 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad |AB| = \sqrt{|a|^2 + 1^2} = \sqrt{a^2 + 1}$$

Forholdet mellem længderne i $|PQ|$ og $|AB|$ kan således omskrives ved:

$$d = \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{|Q_y - P_y|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

For at bestemme Q_y anvendes at Q opfylder linjens ligning således at:

$$Q_y = a \cdot Q_x + b$$

Da sidelængden PQ er lodret gælder det, at $Q_x = P_x$ hvorved ovenstående ligning kan omskrives til:

$$Q_y = a \cdot P_x + b$$

Indsat i udtrykket for afstanden opnås følgende formel:

$$d = \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{|a \cdot P_x + b - P_y|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Dette resultat kan nu opsummeres i den sætning som også kaldes *distanceformlen*.

Distanceformlen

Den korteste afstanden d mellem et givet punkt $P = (P_x, P_y)$ og en ret linje givet den generelle ligning $y = a \cdot x + b$, kan bestemmes ved:

$$d = \frac{|a \cdot P_x + b - P_y|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Det bemærkes for distanceformlen, at såfremt punktet P ligger på linjen vil udtrykket i tælleren give nul, idet der i så fald vil gælde, at

$$a \cdot P_x + b = P_y$$

Dette stemmer overens med betragtningen om, at den korteste afstand mellem en linje og et punkt, der ligger på linjen, netop er nul.