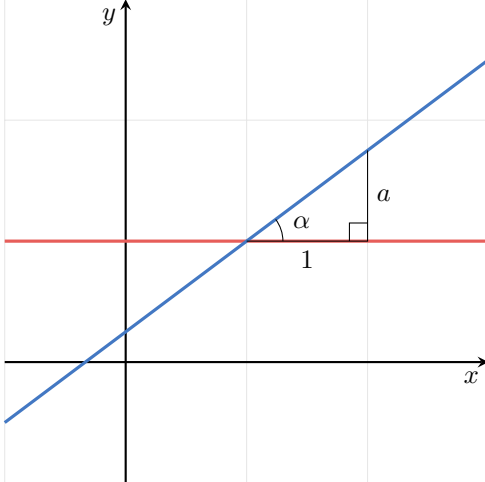


Linjer og vinkler

Vinkler er som bekendt et mål for hvor skæve to linjer står på hinanden. I analytisk geometri, hvor linjer er beskrevet ved den generelle form for linjes ligning $y = a \cdot x + b$, er informationen om linjens hældning givet ved hældningskoefficienten.

Hældningen af en ret linje er relativ til en vandret linje. Dette kan ses ved, at en vandret linje har en hældningskoefficient på 0. Sammenhængen mellem linjens hældning og den vinkel, der udspændes i forhold til en vandret linje kaldes for *hældningsvinklen* og kan bestemmes ved at betragte figuren nedenfor.



Hældningskoefficienten a er i figuren illustreret ved at danne hældningstrekanter, som er den retvinklede trekant hvor hypotenusen udgøres af linjen, den hosliggende katete udgøres af et linjestykke, der er parallel med x -aksen med længden 1. På denne måde vil hældningskoefficienten a udgøre den modstående katete.

For denne retvinklede trekant kan man anvende tangensforholdet i en retvinklet trekant til at opnå en sammenhæng mellem linjens hældningsvinkel α og linjens hældningskoefficient a ved:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{1} = a$$

Den omvendte sammenhæng kan herfra bestemmes ved at anvende den omvendte tangensfunktion:

$$\alpha = \text{atan}(a) \quad \text{hvor} \quad \alpha \in]-90^\circ, 90^\circ[$$

Det skal her fremhæves, at en negativ hældningskoefficient vil give en negativ hældningsvinkel, hvilket betyder at vinklen har en negativ omløbsretning dvs. med uret.

Linjens hældningsvinkel og hældningskoefficient

For en ret linje med en kendt hældningskoefficient a , kan den tilsvarende hældningsvinkel α bestemmes ved:

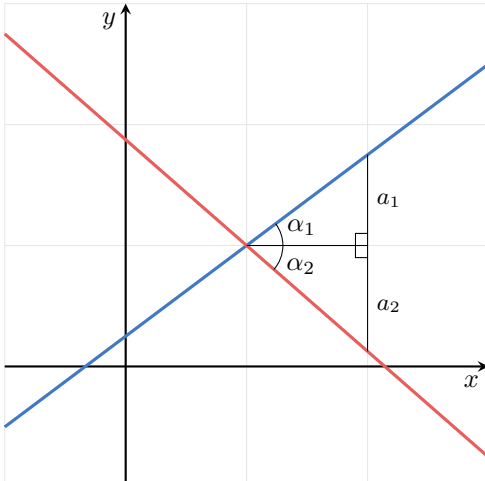
$$\alpha = \text{atan}(a) \quad \text{hvor} \quad \alpha \in]-90^\circ, 90^\circ[$$

For en ret linje med en kendt hældningsvinkel α , kan den tilsvarende hældningskoefficient a bestemmes ved:

$$a = \tan(\alpha)$$

Vinklen mellem to skærende linjer

For at bestemme vinklen mellem to linjer betragtes figuren nedenfor der viser to linjer med hældningskoefficienter på hhv. a_1 og a_2 .



Det ses heraf at den samlede vinkel mellem de to linjer udgøres af summen af de to vinkler α_1 og α_2 , og når disse to vinkler begge er defineret i intervallet $]-90^\circ, 90^\circ[$ vil vinklen mellem de to linjer γ være givet ved differencen af de to linjers vinkler ved:

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$$

Ved brug af formlen for linjernes vinkel kan differencen af de to vinkler omskrives til en formel for vinklen mellem to linjer med hældningskoefficienter givet ved hhv. a_1 og a_2 :

$$\gamma = \text{atan}(a_1) - \text{atan}(a_2)$$

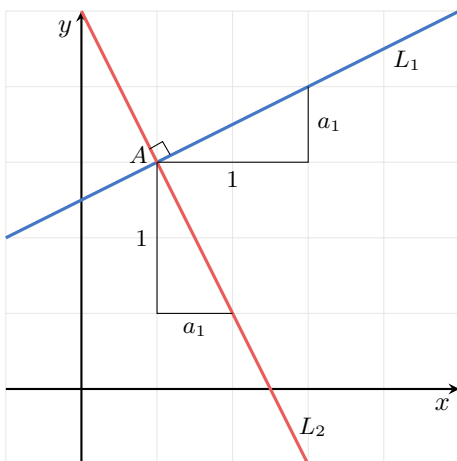
Dette resultat kan nu opsummeres i følgende sætning:

Vinklen mellem to linjer

For to rette linjer med hældningskoefficienter på hhv. a_1 og a_2 kan vinklen mellem de to linjer beregnes ved:

$$\gamma = \text{atan}(a_1) - \text{atan}(a_2)$$

Når to linjer er vinkelrette på hinanden er det ensbetydende med, at de respektive hældningskoefficienter opfylder et bestemt forhold. For at illustrere dette betragtes nedenstående figur hvor to vinkelrette linjer L_1 (blå) og L_2 (rød) er afbilledet hvor det gælder at $a_1 > a_2$.



Først tages der udgangspunkt i linje L_1 (blå) hvor hældningskoefficienten a_1 illustreres ved den tilhørende hældningstrekanter. Da det er givet, at de to linjer er vinkelrette, kan linje L_2 bestemmes ved at rotere linje L_1 med 90° . Roteret hældningstrekanter ligeledes kan det ses, at hældningskoefficient a_2 for linje L_2 er givet ved forholdet:

$$a_2 = \frac{-1}{a_1}$$

Heraf kan direkte udledes for produktet af hældningskoefficienterne at:

$$a_2 = \frac{-1}{a_1} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dette resultat kan nu opsummeres i følgende sætning:

To vinkelrette linjer (ortogonale linjer)

Kun hvis to rette linjer er vinkelrette (ortogonale) på hinanden gælder der, for linjernes hældningskoefficienter a_1 og a_2 , at:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$