

Sinusrelationen for vilkårlige trekanter

De trigonometriske forhold som er direkte angivet af de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens er kun gyldige for retvinklede trekanter. Det er dog også muligt også at opnå trigonometriske relationer for vilkårlige trekanter.

Betragtes arealformlen for en vilkårlig trekant kan denne anvendes med udgangspunkt i hver af trekantens vinkler. Dette vil sige at arealformlen hvor der tages udgangspunkt i vinkel α kan sættes lig med arealformlen hvor der tages udgangspunkt i vinkel γ .

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin(\gamma)$$

Denne ligning kan nu reduceres til et forhold mellem sinusværdien til vinklerne og deres modstående sidelængder.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin(\gamma) \\ \Leftrightarrow c \cdot \sin(\alpha) &= a \cdot \sin(\gamma) \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} &= \frac{\sin(\gamma)}{c} \end{aligned}$$

Der er herved opnået *sinusrelationen* for vilkårlige trekanter:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

For at se sammenhængen mellem sinusrelationen og sinusforholdet for retvinklede trekanter omskrives sinusrelationen ved:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \cdot \sin(\gamma)$$

Her bemærkes, at såfremt trekanten er retvinklet med $\gamma = 90^\circ$ vil den tilsvarende sinusværdi være $\sin(\gamma) = 1$ og relationen reduceres netop til sinusforholdet for en retvinklet trekant.

Ud fra sinusrelationen kan man opstille nogle ligninger for hvordan man kan beregne sidelængder og vinkler i en vilkårlig trekant såfremt man for en vinkel kender den modstående sidelængde.

Sinusrelationen for vilkårlige trekanter

For en vilkårlig trekant hvor:

α og γ er to vilkårlige vinkler og a og c er deres modstående sidelængder til vinklerne.



Der gælder følgende relation mellem sinusværdierne:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

En ukendt sidelængde a kan ud fra sinusrelationen beregnes ved:

$$a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)$$

En ukendt vinklen α kan ud fra sinusrelationen beregnes ved:

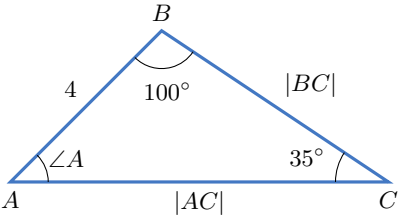
$$\alpha = \text{asin}\left(\frac{a}{c} \cdot \sin(\gamma)\right)$$

Eksempel:

For en trekant ABC er det givet at:

$$\angle C = 35^\circ, \quad |AB| = 4, \quad \angle B = 100^\circ$$

Først skitseres figuren for at skabe et overblik over de kendte og ukendte størrelser i trekanten:



Det ses af figuren at man altså kender $\angle C = 35^\circ$ samt dens modstående sidelængde $|AB| = 4$. Dette kan anvendes til at bestemme den modstående sidelængde til den kendte $\angle B = 100^\circ$ ved sinusrelationen omskrevet til:

$$a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha)$$

I dette tilfælde er den ukendte sidelængde $a = |AC|$, dens modstående vinkel $\alpha = 100^\circ$ og den kendte vinkel og sidelængde er hhv. $\gamma = 35^\circ$ og $c = 4$. Indsættes disse værdier i ligningen kan sidelængden $|AC|$ bestemmes:

$$|AC| = \frac{4}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(100^\circ) \approx 6.87$$

Dvs. sidelængden $|AC| \approx 6.87$.