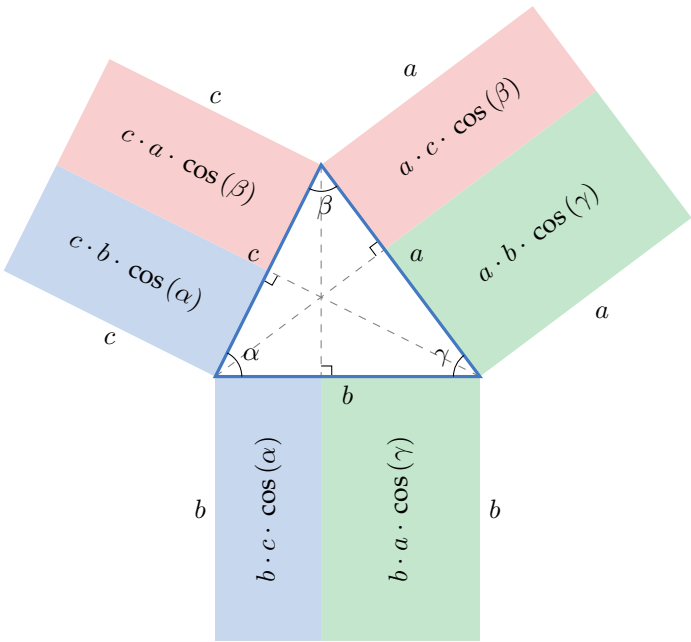


Cosinusrelationen for vilkårlige trekanter

Der kan ligeledes udledes cosinusrelationer for vilkårlige trekanter. Dette kan gøres ved at betragte nedenstående figur hvor der ud fra sidelængderne i en vilkårlig trekant er dannet det tilsvarende kvadrat. Hvert kvadrat er herefter opdelt i to delarealer ift. højden fra den modstående hjørne i trekanten. Cosinusrelationen for retvinklede trekanter er herefter anvendt til at beregne arealet af kvadraternes delarealer.



Ud fra figuren kan der udledes følgende udtryk:

a^2 + b^2 - c^2 = 2 * a * b * cos(gamma)

Venstresiden angiver at kvadraterne fra de to sidelængder a og b lægges sammen hvorefter kvadratet fra den sidste sidelængde c trækkes fra. Betragtes denne operation ud fra de farvede delarealer svarer det til at sammenlægningen af kvadraterne fra sidelængderne a og b vil give et blå, et rødt og to grønne delarealer. Trækkes kvadratet fra sidelængden c fra vil give to grønne delarealer som således udgør højresiden af ligningen.

Ligningen kan herefter omskrives som et udtryk for cosinusværdien til vinklen gamma:

cos(gamma) = (a^2 + b^2 - c^2) / (2 * a * b)

Denne ligning kaldes cosinusrelationen for vilkårlige trekanter.

Alternativt, kan cosinusrelationen ligeledes omskrives på formen:

c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * cos(gamma)

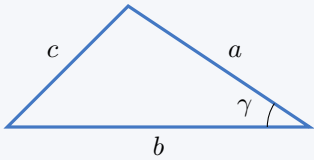
Heraf bemærkes, at såfremt vinkel gamma er en ret vinkel vil cos(gamma) = 0 hvilket bevirker, at cosinusrelationen reduceres til Pythagoras' sætning:

c^2 = a^2 + b^2

Sidelængder og vinkler i vilkårlige trekanter

For en vilkårlig trekant hvor:

gamma er en vilkårlig vinkel i trekanten og a og b er de to hosliggende sidelængder til vinklen.



Der gælder følgende for cosinusværdien til en vilkårlig vinkel:

cos(gamma) = (a^2 + b^2 - c^2) / (2 * a * b)

Den modstående sidelængde c kan ud fra cosinusrelationen beregnes ved:

c = sqrt(a^2 + b^2 - 2 * a * b * cos(gamma))

Vinklen gamma kan ud fra cosinusrelationen beregnes ved:

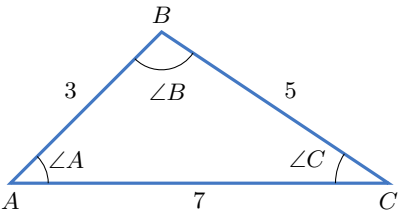
gamma = acos((a^2 + b^2 - c^2) / (2 * a * b))

Eksempel:

For en trekant ABC er det givet at:

|AC| = 7, |AB| = 3, |BC| = 5

Først skitseres figuren for at skabe et overblik over de kendte og ukendte størrelser i trekanten:



Det ses af figuren at man kender alle sidelængderne men ingen af vinklerne. For at bestemme angle A kan man anvende cosinusrelationen omskrevet til at beregne en vinkel:

gamma = acos((a^2 + b^2 - c^2) / (2 * a * b))

Ift. opgavens notation er:

gamma = angle A, c = 5, a = 3, b = 7

Indsat i formlen giver dette:

angle A = acos((3^2 + 7^2 - 5^2) / (2 * 3 * 7)) approx 38.2°