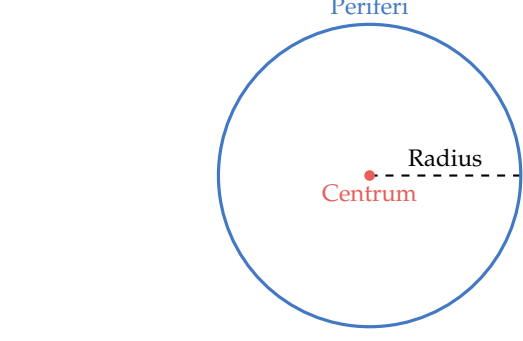


## Cirkler og cirkeludsnit

En *cirkel* er en geometrisk figur i planet, der er afgrænset af en kurve hvor alle punkter på kurven har samme afstand til et entydigt punkt. Punktet kaldes cirkelns *centrum*, afstanden kaldes cirkelns *radius* og selve kurven kaldes for *cirkelperiferien*.

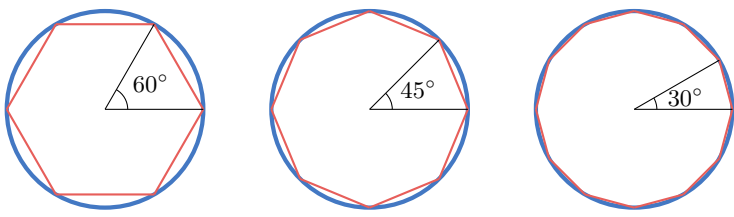


Forholdet mellem omkredsen  $C$  og diameteren af en vilkårlig cirkel har altid den samme talværdi og denne talværdi er givet ved *Arkimedes' konstant*  $\pi$ . Skriveres diameteren som den dobbelte radius  $2r$ , er forholdet givet ved:

$$\frac{C}{2r} = \pi = 3.14159...$$

Talværdien for  $\pi$  er irrationalt hvilket betyder at det ikke kan bestemmes eksakt men kun til en givet præcision.

For at bestemme arealet af en cirkel kan man betragte en cirkel som grænsetilfældet af en regulær polygon, der har uendelige mange kanter. I dette grænsetilfælde vil polygonens sidelængder blive uendelig små og hvert punkt på polygonens omkreds vil tilnærme sig samme afstand til polygonens centrum og derfor vil omkredsen blive cirkulær rund. I figuren nedenfor er denne tilnærmning vist for hhv. en 6-kantet, en 8-kantet og en 12-kantet polygon.



Det ses af figuren at jo flere kanter polygonen har desto bedre tilnærmer den cirklen og allerede ved en 12-kantet polygon er cirkelperiferien til en vis grad tilnærmet.

Det at cirklen kan betragtes som et regulært polygon med et uendeligt antal kanter medfører faktisk, at forholdet mellem omkredsen  $C$  og radius  $r$  har altid den samme talværdi. Dette skyldes, at en regulær polygon er en ligedannet figur hvor længderne har samme forhold uanset skaleringsforholdet. Denne egenskab vil også gælde i grænseværdien af en cirkel og man kan derfor konkludere, at der for cirklen findes et bestemt forhold, nemlig  $2\pi$ , mellem omkredsen og radius.

Fra ovenstående figur skal det ydermere bemærkes, at centervinklen for en sidelængde i polygonen kan beregnes ved at dele cirkelns  $360^\circ$  med antallet af kanter i polygonen ved  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ .

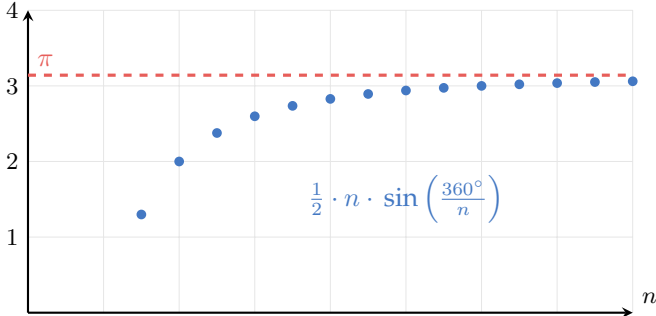
Forbindes en sidelængde med centrum dannes der en ligebeinet trekant med de to ens sidelængder svarende cirkelns radius  $r$ . Arealet af hver disse trekanter kan beregnes ved arealformlen for en retvinklet trekant  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$  og for at bestemme det samlede areal  $A_n$  for en polygon med  $n$  kanter ganges der op med antallet af kanter  $n$ :

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \cdot r^2$$

For at bestemme arealet af en cirkel undersøges nu grænsetilfældet hvor polygonen har et uendelig antal kanter, dvs. at  $n$  bliver uendelig stor. Der skal derfor undersøges, hvad der sker med selve talværdien af den faktor, der ganges med  $r^2$  i ligningen for arealet.

I figuren nedenfor vises grafisk hvad der sker med talværdien når  $n$  bliver større for udtrykket:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$



Det ses af figuren at talværdien af udtrykket tilnærmer sig en bestemt talværdi, nemlig  $\pi = 3.14159...$  når antallet af polygonens kanter  $n$  bliver større.

Dette kan skrives med matematisk notation ved:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \rightarrow \pi \quad \text{når} \quad n \rightarrow \infty$$

For en cirkel som jo netop betragtes som grænsetilfældet hvor  $n \rightarrow \infty$  kan man altså erstatte dette udtryk med konstanten  $\pi$ , og der opnås således formlen for arealet af en cirkel:

$$A = \pi \cdot r^2$$

### Areal og omkreds af en cirkel

For en cirkel med radius  $r$  kan arealet beregnes ved:

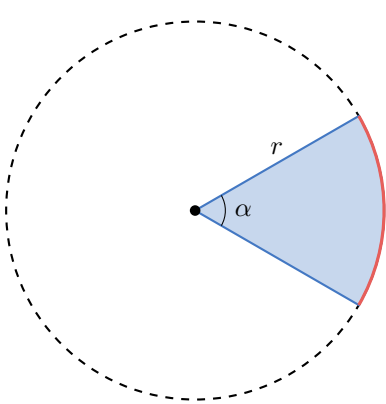
$$A = \pi \cdot r^2$$

Cirkelns omkreds som er længden af cirkelperiferien kan beregnes ved:

$$C = 2\pi \cdot r$$

### Cirkeludsnit

Formlerne for cirkelns omkreds og areal kan nu anvendes til at bestemme hhv. cirkelbuen og delarealet som er udspændt af en centervinkel. Denne delfigur kaldes også for et *cirkeludsnit* og er illustreret i figuren nedenfor hvor det ud fra centervinklen  $\alpha$  er udspændt en *cirkelbue* vist med den røde kurve samt et delareal vist med det blå område:



Længden af en cirkelbuen også kaldet *buelængden* ved vinklen  $\alpha$  og radius  $r$ , kan bestemmes ud fra hvilken andel af cirkelns samlede omkreds der er udspændt af centervinklen  $\alpha$ :

$$C = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

På tilsvarende vis kan arealet af cirkeludsnittet ved vinklen  $\alpha$  og radius  $r$ , bestemmes ud fra den andel af det samlede areal som er udspændt af centervinklen  $\alpha$ :

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Det bemærkes her, at ved en centervinkel der udgør en hel omgang  $\alpha = 2\pi$  vil formelen for længden af cirkelbuen og formelen for arealet af cirkeludsnittet reduceres til formlerne for hhv. cirkelns omkreds og cirkelns areal.

### Areal og omkreds af et cirkeludsnit

For et cirkeludsnit med radius  $r$  og centervinkel  $\alpha$  kan arealet beregnes ved:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Længden af cirkelbuen også kaldet buelængden, kan beregnes ved:

$$C = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$