

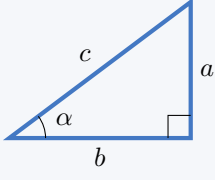
De trigonometriske forhold

For at kunne beregne sidelængderne i retvinklede trekanter kan man ud over at anvende Pythagoras’ sætning også anvende at man kan beregne de *trigonometriske forhold* mellem sidelængderne. En af følgerne fra princippet om ensvinklede trekanter er, at forholdet mellem sidelængderne i en trekant ikke ændrer sig når trekanten forstørres. Dette betyder effektivt, at man for en retvinklet trekant kan beregne forholdet mellem sidelængderne hvis man bare kender én af de *spidse* vinkler i trekanten. Forholdene, som altså kun afhænger af den spidse vinkel, kan derfor betragtes som funktioner af den spidse vinkel og disse funktioner kaldes hhv. *sinus*: $\sin(\alpha)$, *cosinus* $\cos(\alpha)$ og *tangens* $\tan(\alpha)$.

De trigonometriske forhold

For en retvinklet trekant hvor:

- α er den kendte spidse vinkel.
- a er den modstående katete.
- b er den hosliggende katete.
- c er hypotenusen.



Der gælder der, at forholdene mellem sidelængderne dvs. $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ og $\frac{a}{b}$ alle kun afhænger af vinklen α .

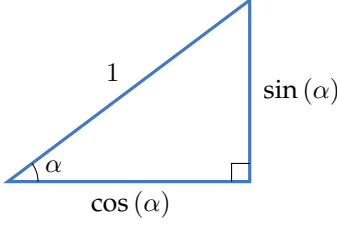
De trigonometriske funktioner $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ og $\tan(\alpha)$ kan bruges til at beregne disse forhold ved:

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ og $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ og $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

For effektivt at kunne beregne vinkler og sidelængder i retvinklede trekanter har man historisk set lagt en del arbejde i at bestemme de trigonometriske funktioner $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ og $\tan(\alpha)$, der angiver de trigonometriske forhold i en retvinklet trekant med en spids vinkel α .

Dette kan gøres ved at tage udgangspunkt i en retvinklet trekant hvor hypotenusen sættes til en enhedslængde af 1 og den spidse vinkel α beholdes som en variabel. På denne måde bliver de sidelængderne på de to kateter hhv. $\sin(\alpha)$ og $\cos(\alpha)$ jf. de trigonometriske forhold.

En sådan *enhedstrekant* er vist i figuren nedenfor.

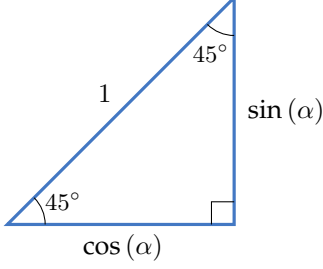


Idet der her er tale om en retvinklet trekant gælder Pythagoras’ sætning og der kan derfor opstilles det der kaldes *grundrelationen* i trigonometri:

$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$

Grundrelationen kan anvendes til at bestemme nogle værdier af de trigonometriske funktioner for nogle simple tilfælde.

Et simpelt tilfælde er når den retvinklede trekant har to lige store kateter og er derfor ligebenet hvor de to spidse vinkler er lige store dvs. 45° .

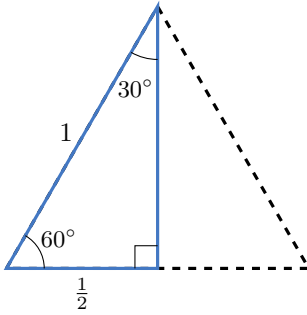


Dette betyder altså, at sinus- og cosinus-værdien også er lige store og ved at anvende at $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$ kan grundrelationen for dette særtilfælde omskrives til kun at indholde sinusfunktionen til 45° som herefter kan udledes ved:

$\sin(45^\circ)^2 + \sin(45^\circ)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \sin(45^\circ)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow \quad \sin(45^\circ) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Idet $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$ kan det også konkluderes, at $\cos(45^\circ) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ og da tangensfunktionen er forholdet mellem længderne af de to kateter er $\tan(45^\circ) = 1$.

Et andet simpelt tilfælde er når den retvinklede trekant udgør halvdelen af en ligesidet trekant med sidelængden 1 som ses i figuren nedenfor.



De spidse vinkler i den retvinklede trekant er hhv. 60° og 30° og den ene katete har længden er $\frac{1}{2}$. Ud fra enhedstrekanten ovenfor kan man allerede herfra konkludere at:

$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

Ud fra grundrelationen kan man herefter beregne $\cos(30^\circ)$ ved:

$\sin(30^\circ)^2 + \cos(30^\circ)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos(30^\circ)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow \quad \cos(30^\circ) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

Tilsvarende for $\sin(60^\circ)$ ved:

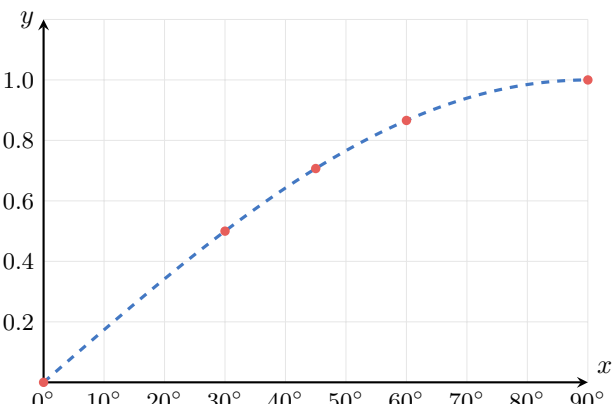
$\sin(60^\circ)^2 + \cos(60^\circ)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(60^\circ)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow \quad \sin(60^\circ) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

For tangensfunktionen er $\tan(30^\circ) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ og $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$.

I tillæg til disse vinkler kan man ligeledes udlede at hvis vinklen α bliver uendelig lille vil den modstående katete også blive uendelig lille og den modstående katete vil tilnærme sig værdien 1. Dette vil sige at $\sin(0^\circ) = 0$ og $\cos(0^\circ) = 1$. Tilsvarende hvis man betragter tilfældet hvor vinklen α tilnærmer sig 90° vil man kunne udlede at $\sin(90^\circ) = 1$ og $\cos(90^\circ) = 0$.

Alle de beregnede værdier samles i en tabel og plottes i figuren herunder:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0



Alene ud fra de fem talpar i tabellen kan man beregne nogle tilnærmede funktioner (4.gradspolynomier) for sinus og cosinus:

$\sin(\alpha) \approx \frac{2.7}{100000000} \cdot \alpha^4 - \frac{1.088}{1000000} \cdot \alpha^3 + \frac{6.5}{1000000} \cdot \alpha^2 + \frac{1.737}{100} \cdot \alpha$
 $\cos(\alpha) \approx \frac{2.7}{1000000000} \cdot \alpha^4 + \frac{1.244}{10000000} \cdot \alpha^3 - \frac{1.57}{10000} \cdot \alpha^2 + \frac{5.85}{100000} \cdot \alpha + 1$

Funktionerne som også er plottet i figuren ovenfor er en forholdsvis grov approksimation som beregner hhv. sinus- og cosinus-funktionen til en nøjagtighed på tre decimaler. Anvendes i stedet computerens mere sofistikerede indbyggede funktioner, beregnes værdierne til en nøjagtighed på computerens afrundingsfejl som typisk er sat til 15 decimaler.